Gymnázium T. G. Masaryka, Litvínov, Studentská 640, příspěvková organizace

SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY

Mgr. Štěpán Pešička a kolektiv

OBSAH

VYSVĚTLIVKY

Dvojitá čára označuje náročnější nebo nadstandardní příklady (vhodné pro přípravu na VŠ).

Pokud naleznete ve sbírce nějakou chybu, prosím upozorněte nás na e-mail **pesicka@gtgm.cz**.

1 ARITMETIKA, LOGIKA A MNOŽINY

1.1 Číselné obory

1) **Seřaďte uvedená čísla vzestupně** (mezi čísla pak vložte znaménka < > nebo =): **a)** $3; 3,2; 3,1\overline{9}; 3,\overline{2}$

b) $\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; \frac{2}{5}; \frac{4}{7}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{1}{4}$ **c)** $\sqrt{2}; 1,4; \sqrt{3}; 1,3$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}; 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2) **Zapište a vypočtěte: a)** rozdíl odmocnin součtů čísel 5 a 4 a čísel 12 a 4, **b)** odmocnina součtu druhých odmocnin z převrácených hodnot čísel $\frac{9}{4}$ a $\frac{9}{16}$, **c)** odmocnina ze součtu druhých mocnin čísel 1 a 5.

3) **Vypočtěte:**

a) $\left(\frac{4}{24}+\frac{7}{14}\right):\frac{3}{5}-2\frac{1}{12}:\frac{15}{8}$ **b)** $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right):\left(-3\frac{1}{6}\right)$ **c)** $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}}$ **d)** $\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{7}{9}}:\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

e) $\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}$ **f)** $\frac{1\frac{3}{5}-2\frac{8}{15}}{6-\frac{2}{5}}$ **g)** $\frac{2\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}{2\cdot\frac{3}{4}-1\frac{1}{5}+\frac{2}{10}}$ **h)** $\frac{\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)}{1\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}-\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{2}{5}:\left(-\frac{1}{3}\right)}$

4) **Zapište zlomky jako desetinná čísla** (s periodou, je-li to nutné):

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{6}$ **c)** $\frac{1}{7}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{2}{15}$ **g)** $\frac{1}{11}$

5) **Desetinná čísla s periodou převeďte na zlomek v základním tvaru:**

a) $0,\overline{27}$ **b)** $0,\overline{6}$ **c)** $2,\overline{345}$ **d)** $0,\overline{1234}$ **e)** $0,7\overline{2}$ **f)** $0,1\overline{36}$ **g)** $0,7\overline{27}$

6) **Vypočtěte:**

a) $90^\circ 12' 22'' + 9^\circ 52' 48''$ **b)** $38^\circ 12' 51'' - 29^\circ 44' 56''$ **c)** $121^\circ : 3$ **d)** $90 \cdot 25^\circ 48' 11''$

7) **Vypočtěte:**

a) $||5\cdot 7-4\cdot 10|-|2\cdot 4-8\cdot 6|:||-7|-|-8|-|-9|||$ **b)** $|1-|-1-|-1-|-1-1-|1-1|||||$

8) Výrobek byl postupně dvakrát zdražen o 10 %. Nová cena po všech zdraženích byla 9680 Kč. Jaká byla původní cena před zdraženími?

9) Dvěma stejnými přívody vody se nádrž naplní za 6 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní třemi stejnými přítoky, které budou pracovat na 90 %?

10) Pět stejných nákladních aut odveze zeminu za 8 hodin. Za jak dlouho odveze toto množství zeminy 8 aut, pokud budou nakládat jen 80 % obvyklé nakládky?

11) Automobil ujel za 50 sekund 900 m. Určete jeho rychlost v mph (mile per hour), je-li 1 míle rovna 1,6 km.

12) Z celkové hmotnosti ovocné pecky připadá 18 % na jádro. Kolik kg pecek musíte nasbírat, abyste získali 0,5 kg jader?

13) Na farmě je ustájeno 260 krav. V kravíně připadalo na jednu krávu 5 m^2. O kolik procent se zmenšilo místo pro jednu krávu, když se počet krav zvýšil o 10 %?

14) Rozměry obdélníku jsou v poměru 1 : 3. O kolik procent musíme zmenšit delší stranu, jestliže zvětšíme menší stranu o 15 % a obsah obdélníku chceme zachovat?

15) V ceně výrobku je započtena 5% daň. O kolik se zvětší cena výrobku oproti původní ceně, jestliže se daňová sazba zvýší z 5 % na 19 %?

16) Kamarádi byli na výletě. Peníze, které každý složil jako zálohu, beze zbytku utratili. Při závěrečném vyúčtování celkovou útratu rozdělili rovnoměrně na osobu a na den. Doplňte chybějící údaje.

Jméno	Počet dnů	Záloha v Kč	Doplatek	Přeplatek
Adam	7	540	0	36
David		490	0	58
Karel	7		44	0
Jiří	4			0

1.2 Výroková logika

1) Rozhodněte, které z vět jsou výroky (a u nich určete pravdivostní hodnotu):

a) Pro všechny trojúhelníky v rovině platí: součet velikostí vnitřních úhlů je 180°.

b) Rovnoběžníky jsou čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník a pravidelné mnohoúhelníky.

c) Každé číslo, které je dělitelné čtyřmi, je také dělitelné dvěma.

d) Každé číslo, které je dělitelné dvěma, je také dělitelné čtyřmi.

e) Je každé číslo, které je dělitelné dvěma, dělitelné také čtyřmi?

f) Je-li číslo dělitelné devíti, je jeho ciferný součet dělitelný devíti.

g) Číslo dělitelné devíti, právě když je jeho ciferný součet dělitelný devíti.

h) Číslo dělitelné sedmi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný sedmi.

i) Prostá funkce je buď rostoucí, nebo klesající, nebo konstantní.

j) Některé prosté funkce mají v celém svém definičním oboru kladné funkční hodnoty.

k) Kolik počátků má přímka?

2) Určete, pro které dosazené údaje (proměnné) **má výroková forma pravdivostní hodnotu 1:**

a) Obsah rovinného útvaru *U* se rovná součinu délek jeho dvou sousedních stran.

b) Druhá mocnina přirozeného čísla *n* končí číslicí 5.

c) V trojúhelníku *ABC* platí $a^2+b^2=c^2$.

d) $|a+b|<0$

e) $x^2-9>0$

3) Určete pravdivostní hodnotu výroků a negujte je:

a) Rovnice $x+1=5$ má jediný kořen.

b) Rovnice $x+1=5$ má nekonečně mnoho kořenů.

c) Rovnice $x+1=5$ nemá jeden, ani dva, ani tři kořeny.

d) Každé z čísel 1, 4, 9 je druhou mocninou přirozeného čísla.

e) Není pravda, že alespoň jedno z čísel 1, 4, 9 není druhou mocninou přirozeného čísla.

f) Mezi čísly 1, 4, 9 je alespoň jedno, které je třetí mocninou přirozeného čísla.

4) Určete tabulkou pravdivostní hodnotu výroků:

a) $\neg(\neg A\vee\neg B)\vee B$, **b)** $A\Rightarrow B\wedge\neg A$, **c)** $A\wedge B\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$, **d)** $A\wedge B\wedge\neg B$

5) S využitím tautologií zjednodušte výroky:

a) $(A\vee B)\wedge\neg(\neg A\vee\neg B)$

b) $\neg\left[\neg\left(\neg\left(\neg(A\Rightarrow\neg B)\right)\vee\neg(\neg A\wedge\neg B)\right)\right]$

c) $\neg A\vee\neg B\Rightarrow(\neg A\wedge\neg B)$

d) $\neg(A\Rightarrow B)\wedge\neg(B\Rightarrow A)$

6) Zapište dané výroky symbolicky:

a) Existuje alespoň jedno přirozené číslo takové, že jeho druhá odmocnina je přirozené číslo.

b) Každé přirozené číslo je dělitelné jedničkou a samo sebou.

c) Ke každému reálnému číslu existuje reálné číslo takové, že jejich součet je roven nule.

7) Negujte dané výroky:

a) Alespoň pět žáků chybělo.

b) Nejvýše sedm zájemců se neozvalo.

c) Právě tři baterie byly vadné.

8) **Jsou dány dva výroky:** Ústava ČR může být měněna ústavními zákony. *(Pravdivý.)* Ústava ČR může být měněna nařízením vlády. *(Nepravdivý.)* **Rozhodněte o pravdivosti výroků:**

a) Ústava ČR může být měněna ústavními zákony nebo nařízením vlády.

b) Ústava ČR nemůže být měněna ústavními zákony nebo nemůže být měněna nařízením vlády.

c) Jestliže ústava ČR nemůže být měněna ústavními zákony, pak může být měněna nařízením vlády.

d) Ústava ČR může být měněna ústavními zákony právě tehdy, když může být měněna nařízením vlády.

9) **Rozhodněte, zda následující dvojice vět znamenají totéž** (tj. jsou logicky ekvivalentní)**:**

a) Bude-li večer pršet, půjdu do kina. Nebude-li večer pršet, nepůjdu do kina.

b) Když prší, jsou chodníky mokré. Když jsou chodníky mokré, prší.

c) Jestliže dostaneš jedničku, půjdeme na zmrzlinu, a jestliže nedostaneš jedničku, možná půjdeme a možná nepůjdeme na zmrzlinu. Určitě se nestane, že dostaneš jedničku a nepůjdeme na zmrzlinu.

10) **Která z uvedených vět je definicí a která je matematickou větou?**

a) Úhel je část roviny, ohraničená dvě polopřímkami, které mají společný počátek .

b) Nechť jsou dány v rovině dvě rovnoběžky *p*, *q* a přímka *k*. Je-li *k* kolmá k *p*, pak je *k* kolmá k přímce *q*.

c) Součet velikostí vnitřních úhlů každého rovinného trojúhelníku je 360°.

d) Každá parabola je grafem funkce.

e) Osa úsečky je množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou krajních bodů úsečky.

f) Číslo je dělitelné 18, právě když je dělitelné 6 a 3.

11) **Rozhodněte, ve kterých případech je pravdivý výrok** $A \wedge B \Rightarrow C$**, je-li:**

a) *A*: Přímka *p* je rovnoběžná s přímkou *q*. *B*: Přímka *k* je kolmá k přímce *q*. *C*: Přímka *k* je kolmá k přímce *p*.

b) *A*: Každý pes štěká. *B*: Haryk je pes. *C*: Haryk štěká.

c) *A*: Někteří lidé se rádi rozčilují. *B*: Pan Ryba se rád rozčiluje. *C*: Pan Ryba je člověk.

d) *A*: Když prší, nemám dobrou náladu. *B*: Dnes neprší. *C*: Možná, že nebudu mít dobrou náladu.

e) *A*: Když prší, nemám dobrou náladu. *B*: Nemám dobrou náladu. *C*: Prší.

1.3 Množiny a intervaly

1) **Určete množiny (** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ **), jejímiž podmnožinami jsou:**

a) $\{1;2;3;4\}$ **b)** $\{-2;2;-4;4\}$ **c)** $\left\{\sqrt{4};\sqrt{9};\sqrt{16};\sqrt{25}\right\}$ **d)** $\left\{\frac{4}{2};-\frac{8}{4};-\frac{9}{3}\right\}$

e) $\left\{\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};\sqrt{5}\right\}$ **f)** $\{0,3;0,4;0,5;0,6\}$ **g)** $\left\{-0,1\overline{6};3,\overline{2};1,23\overline{68}\right\}$ **h)** $\left\{\sqrt{-1};\sqrt{-2};\sqrt{-3}\right\}$

2) Určete, které množiny se rovnají: $A=\{x\in\mathbb{N}; x<0\}$; $B=\{0\}$; $C=\{x\in\mathbb{R}; -2\le x\le 2\}$; $D=\{-2;-1;0;1;2\}$; $E=\{x\in\mathbb{R}; |x|\le 2\}$; $F=\{\ \}$; $G=\{x\in\mathbb{Z}; -3<x<3\}$; $H=\{x\in\mathbb{R}; |x|\le 0\}$.

3) **Určete průnik množin *A* a *B*:**

a) $A=\{1;2;5;8\}; B=\{1;3;5;7\}$ **b)** $A=\{x\in\mathbb{N}; x>2\}; B=\{x\in\mathbb{N}; x<7\}$

c) $A=\{x\in\mathbb{Z}; x>-3\}; B=\{x\in\mathbb{Z}; x>-5\}$ **d)** $A=\{x\in\mathbb{Z}; x<0\}; B=\left\{x\in\mathbb{Z}; \sqrt{x^2}=x\right\}$

4) **Určete sjednocení a průnik intervalů:**

a) $\langle -2;1\rangle, \langle 0;3\rangle$ **b)** $\langle -2;3), \langle 3;5)$ **c)** $(-3;-1), (-1;4\rangle$ **d)** $\langle -4;0\rangle, \langle 0;2)$

e) $(1;\infty), \langle 3;\infty)$ **f)** $(-\infty;-1), \langle -2;\infty)$ **g)** $(3;5), \langle 3;5\rangle$ **h)** $(-\infty;2\rangle, \langle 2;\infty)$

5) **Jsou dány intervaly** $K=\langle 3;5\rangle; L=\langle 2;5); M=(3;6); N=(2;6\rangle$**. Vyjádřete pomocí nich intervaly: a)** $\langle 3;6\rangle$, **b)** $(2;5)$, **c)** $\langle 3;5)$, **d)** $(2;5\rangle$**.**

6) **Pomocí Vennových diagramů řešte:**

a) Dvanáct žáků z tercie chodí na sportovní potápění a deset na softbal. Ve třídě je 25 žáků a z toho 7 nesportuje vůbec. Kolik softbalistů chodí také na sportovní potápění?

b) V ozdravovně se 17 lidí léčí s astmatem, 5 z nich spolu s dalšími 10 má navíc problémy s obezitou, 8 pacientů přijelo kvůli obtížím páteře a manželé Novákovi mají všechny uvedené obtíže. Kolik lidí je v ozdravovně, jestliže víme, že další pacienti s obtížemi páteře nemají další problémy?

c) Každý den v týdnu krom neděle mám večer program: Dvakrát chodím plavat, třikrát na francouzštinu a třikrát do knihovny. Plavat a do knihovny v ten samý den nechodím. Je možné jít po dva dny pouze na francouzštinu? Tak vidíte, jak je to náročné. Také nedělám stejné věci po dva dny za sebou a právě jednou za týden mám pouze plavání. Když mám v pondělí jen francouzštinu, jak vypadá můj týdenní rozvrh?

7) **a)** Jsou dány množiny $A=\{x\in\mathbb{N}; |x|<10\}, B=\{2;3;4;7\}$. Určete B'_A. **b)** Je dán interval $J=\langle 0;5)$. Určete: $J'_{\mathbb{R}}, J'_{\mathbb{R}^+}, J'_{\mathbb{R}_0^-}$.

8) **Je dána množina** $A=\{1;2;3;4\}$**. Nalezněte všechny podmnožiny *X* množiny *A*, pro které platí: a)** $\{1;2\}\cap X=\{1\}$, **b)** $\{1;3;5\}\cap X=\{1;3\}$, **c)** $\{2\}\cap X=\{\ \}$, **d)** $\{1;2\}\cap X=\{3;4\}$

9) Určete počet celých čísel v intervalu $\in \left\langle -\sqrt[3]{10^9};\sqrt{10000}\right)$

10) **Vyslovte a dokažte de Morganovy zákony.**

11) **Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda platí:**

a) $(A\cup B)\cap C'=(A\cap C')\cup(B\cap C')$ **b)** $(A\cup B)\cap(A\cup C')=A\cup(B\cap C')$

1.4 Dělitelnost

1) Myslím si trojciferné číslo. Když od něj odečtu 7, bude výsledek dělitelný 7. Když od něj odečtu 8, bude výsledek dělitelný 8. Když od něj odečtu 9, bude výsledek dělitelný 9. Jaké číslo jsem si myslel?

2) Máte 360 bonbónů, 200 perníků a 240 ořechů a chcete je rozdělit do balíčků tak, aby byly balíčky všechny stejné. Kolik nejvýše stejných balíčků můžete připravit? Co přesně bude každý z nich obsahovat?

3) Mezi čísly 12, 20, 36, 56, 66, 84 je jeden vetřelec. Abyste ho našli, musíte najít takové číslo, které není dělitelem vetřelce, ale je dělitelem všech ostatních. Číslo 12 není vetřelec.

4) V zápisu 41*6 nahraďte hvězdičku číslicí tak, abyste dostali číslo dělitelné a) třemi, b) čtyřmi. Uveďte všechny možnosti.

5) Nalezněte prvočíselný rozklad čísla 13770.

6) Určete $D(1496;2024)$ a $n(156;1287)$.

7) **Doplňte chybějící část tvrzení tak, aby byla pravdivá** (všude předpokládáme *pro všechna*)**:**

a) $a|b\wedge a|c\Rightarrow a|b?c$, **b)** $a|b\wedge c|d\Rightarrow ac|b?$, **c)** $a|b\wedge b|a\Rightarrow ?$, **d)** $a|bc\wedge n|a\wedge n\nmid b\Rightarrow ?$

8) *A*, *B* jsou různé číslice. Nalezněte všechna čísla tvaru: **a)** *ABB* dělitelná devíti, **b)** *ABA* větší jak 100 a dělitelná patnácti.

9) Odvoďte (a tím dokažte) kritérium dělitelnosti číslem 11.

10) Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

11) Nalezněte a zdůvodněte všechny možné hodnoty pro ($n \in \mathbb{N}$, *p*, *q* jsou různá prvočísla)**:**

a) $D(p,q)$ **b)** $D(n,n+1)$ **c)** $D(n,n+2)$ **d)** $D(n,n+5)$

e) $D(n,n+30)$ **f)** $D(8n+7,5n+6)$

12) a) Nalezněte poslední 2 cifry čísla 7^{999}. **b)** Určete zbytek po dělení čísla 5^{999999} číslem 7.

1.5 Komplexní čísla

1) Vypočtěte (výsledek vyjádřete v algebraickém tvaru)**:**

a) $\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^{13}+\mathrm{i}^{23}+\mathrm{i}^{33}+\mathrm{i}^{43}$ **b)** $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2\cdot\mathrm{i}^3\cdot\mathrm{i}^4\cdot\ldots\cdot\mathrm{i}^{50}$ **c)** $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\ldots+\mathrm{i}^{50}$

d) $\left[(1+2\mathrm{i})-(3-\mathrm{i})\right]^2\cdot(1-\mathrm{i})$ **e)** $\frac{2-\mathrm{i}}{-3+\mathrm{i}}-\frac{1+2\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$ **f)** $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{-2}+\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2$

g) $\overline{\overline{1+\mathrm{i}}\cdot\overline{2+3\mathrm{i}}}\cdot(1+3\mathrm{i})$ **h)** $\dfrac{\left|\frac{3-4\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}\right|+\left|\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right|}{1+2i}$ **i)** $a=\frac{2-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot(3-2\mathrm{i})+(1+2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}^7$

2) Vypočtěte: a) $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$ **b)** $\sqrt{5-12\mathrm{i}}$

3) Vyjádřete komplexní číslo v goniometrickém tvaru:

a) $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ **b)** $z=1+\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ **c)** $(1-\mathrm{i})\left(\cos\frac{5}{12}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

d) $\frac{\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{1+\mathrm{i}}{\cos\frac{7}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{7}{6}\pi}$ **e)** $2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

4) Znázorněte v Gaussově rovině všechna komplexní čísla, pro která platí:

a) $|z-\mathrm{i}|\geq|z+1-2\mathrm{i}|$ **b)** $1<|z|\leq\left|2+\mathrm{i}\sqrt{5}\right|$ **c)** $\left|\frac{\overline{z}}{|z|}+|z|\right|<2$

d) $|z-2-3\mathrm{i}|=|z|$ **e)** $|z-3|=2$ **f)** $z=\overline{z}$

5) Užitím Moivreovy věty vypočtěte:

a) $\left(\cos\frac{1}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^{62}$ **b)** $(1-\mathrm{i})^{100}$ **c)** $\left(1+\cos\frac{1}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\pi\right)^{12}$

6) Vypočítejte číslo *a*, určete jeho absolutní hodnotu a napište číslo komplexně sdružené k číslu *a*. $a=(1+3\mathrm{i})^2+\frac{26+13\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}-2(1-\mathrm{i})$.

7) Určete součin a podíl čísel (bez převodu na algebraický tvar): $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ a $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

8) Určete komplexní číslo *x*, pro které platí: $\left|\frac{x-4}{x-8}\right|=1\wedge\left|\frac{x-12}{x-8\mathrm{i}}\right|=\frac{5}{3}$.

2 ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

2.1 Mnohočleny

1) Zjednodušte:

a) $0,6ab^2+\left\{2a^3+b^3-\left[3ab^2-\left(a^3+2,4ab^2-b^3\right)\right]\right\}$

b) $a^2(c-3a)-\left\{c^2(a+3c)-\left[c\left(3c^2+ac-a^2\right)+2a^3\right]\right\}$

c) $x\left(x^2+xy+y^2\right)-y\left(x^2-xy-y^2\right)-x\left(x^2+2y^2\right)$

d) $(a+3b)(a-2c)(b-c)-(a+2b)(a+c)(b+c)$ pro $a=3; b=-2; c=2$

2) Vydělte a stanovte podmínky:

a) $\left(15-9a+5a^2-3a^3\right):(5-3a)$ **b)** $\left(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3\right):(x-y)$ **c)** $\left(m^5-32\right):(2-m)$

d) $\left(2x^7+3x^6+14x^5+10x^4-7x^3-32x^2+15x-5\right):\left(x^4+7x^2-3x+1\right)$

e) $\left(12z^6-7z^4+32z^3-13z^2-24z\right):\left(8z^3+4z^2-12z\right)$

f) $\left(13x^2y^3+9x^5-21xy^4+6y^5-15x^4y-8x^3y^2\right):\left(2x^2y+3y^3+3x^3\right)$

3) Rozložte na součin:

a) $2a^2-a-1$ **b)** $5m^3n^2-55m^2n^2+50mn^2$ **c)** $xy+xz+zy+z^2$

d) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$ **e)** $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

f) $x^4-6x^3+11x^2-6x$ **g)** $\left(x^2+y^2\right)^3+\left(z^2-x^2\right)^3-\left(y^2+z^2\right)^3$

4) Určete největší společný dělitel a nejmenší společný násobek výrazů:

a) $x^2-y^2; x^4-y^4; x^6-y^6$ **b)** $a^3+4a^2b+4ab^2; a^3-4ab^2; 3a^3+6a^2b$

c) $x^2-4; x^2+x-2; x^2+3x+2$ **d)** $x^2+4x-46; 2x^2-9x-5$

5) Dokažte, že $x^n-ax^{n-1}+ax-1$ je dělitelný výrazem $x-1$ pro všechna přirozená čísla $n>1$.

6) Určete $x^4+y^4+z^4$, je-li $x+y+z=0$ a $x^2+y^2+z^2=a$.

7) Po umocnění trojčlenu $(a+b+c)^5$ se v něm neobjeví člen: $10a^2b^2c^2$, $20abc^3$, $5b^4c$, $10a^3c^2$.

2.2 Lomené výrazy

1) Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\dfrac{ab-b-a^2+a}{ab+b-a^2-a}$ **b)** $\dfrac{3ab+9b-2a-6}{3ab-2a-9b+6}$ **c)** $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$

2) Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{a}{9}\right):\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{3}\right)$ **b)** $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\left(1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\left(2-\dfrac{1+b^2}{b}\right):\left(\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1\right)$

c) $\left(\dfrac{2x+y}{x+y}-\dfrac{x-2y}{x-y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$ **d)** $\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{2+x}+\dfrac{x(16-x)}{x^2-4}$

e) $\left(\dfrac{x+5}{x^2-81}+\dfrac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\dfrac{x+3}{x-9}\right)^2-\dfrac{1+x}{9+x}$ **f)** $\left[1+\dfrac{1+\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}\right]\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{a^2}{x^2}}+\dfrac{a^2-x^2}{a-x}$

g) $\dfrac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)}-\dfrac{a+b}{ab+a-2b-2}-\dfrac{a-b}{ab-a-2b+2}$

h) $\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right):\left(\dfrac{1}{24}\cdot\dfrac{6a^3+12a^2-48}{a^4+2a^3-8a-16}-\dfrac{1}{4a}\right)$

i) $\left[\dfrac{1+\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{1-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}:\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2-1}{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}\right]\cdot\left(\dfrac{y^3-xy^2}{x^4+x^2y^2}:\dfrac{4x^2-4xy+4y^2}{x^2y^2-2xy-x^2-y^2}\right)$

j) $\dfrac{1}{a(a-c)(a-b)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$ **k)** $\dfrac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{\dfrac{a}{bc}(c-b)+\dfrac{b}{ca}(a-c)+\dfrac{c}{ab}(b-a)}$

3) Vyjádřete neznámou ze vzorce:

a) $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2;[v_0,t]$ **b)** $K=\pi\dfrac{M}{(R+h)^2};[M,R]$ **c)** $\dfrac{1}{f}=\left(\dfrac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right);[r_1]$

4) Určete hodnotu výrazu: $\dfrac{x^2+4|x|+4}{|x+2|}:\dfrac{x^2+2|x|}{|x|}$.

5) Trať kanoistického závodu je dlouhá *d* km a závodníci ji musejí projet jednou po proudu a podruhé proti proudu. Je-li rychlost kánoe v klidné vodě v_1 km/h a rychlost proudu v_2 km/h, za jak dlouho projede závodník tratí oběma směry? Byl by závodník u cíle dřív nebo později, kdyby jel stejně dlouhý závod se stejným výkonem v klidné vodě? Jaký by byl časový rozdíl?

2.3 Mocniny a odmocniny

1) Vypočtěte: a) $\sqrt{\dfrac{2025}{4225}}+\sqrt{\dfrac{289}{324}}$ **b)** $\left(\sqrt{-10\cdot\left(\sqrt{625}-\sqrt{1225}\right)+\sqrt{400}}\right)^2$ **c)** $\sqrt[3]{216}-\sqrt{1,96}-\sqrt[4]{256}$

2) Zjednodušte a stanovte podmínky:

a) $\left(\sqrt[12]{\dfrac{a^4x^2}{c}}:\sqrt[8]{\dfrac{a^3x^5}{c^6}}\right):\sqrt[6]{\dfrac{c^5}{ax^3}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{\left(4ab^2\right)^2}{(5c)^0}}:\dfrac{\sqrt[3]{2b^{-2}}}{\sqrt[6]{a^{-4}}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[12]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{b^{-1}}}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$

d) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)-\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **e)** $\left(\dfrac{x^{-1}-x^{-1/3}}{x^{-2/3}-1}\right):\left(\dfrac{1-x^{-2}}{x^{-4}-x^{-2}}\right)$

3) Usměrněte zlomky:

a) $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}$; $a\geq 1$ **d)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$

3 ROVNICE A NEROVNICE

3.1 Lineární rovnice a jejich soustavy

1) Řešte rovnice:

a) $\frac{5n+1}{4}+\frac{n-1}{6}+\frac{5n-11}{8}+\frac{4n-1}{9}=2(n+1)$ **b)** $\frac{x^2}{x+1}-x=\frac{x}{x+1}-\frac{2x^2}{x^2+x}$

c) $(2x-5)(8x-1)-(4x-3)^2=12(x-1)-7$ **d)** $\frac{2}{(1-3x)(3x+11)}=\frac{1}{(3x-1)^2}-\frac{3}{(3x+11)^2}$

e) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-1=\frac{6}{x^2+x-2}$ **f)** $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}=\frac{6x^2+20x-8}{x^3+3x^2+2x}$

g) $\frac{1}{x-2}-\frac{x-3}{x+4}=\frac{6}{x^2+2x-8}-1$ **h)** $\frac{\frac{h+1}{h}+\frac{h}{h+1}}{\frac{1}{h^2+h}}-\frac{\frac{2}{h}-\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h^3}}=h+5$

2) Řešte rovnice s absolutní hodnotou:

a) $2-|x-5|=x-4|x+1|$ **b)** $\frac{|1+2y|+2}{|3-y|}=2$

c) $|x|+|x+1|=|x+2|+3$ **d)** $\big|x+|x+1|\big|=2-|x|$

3) Řešte rovnici s neznámou *x* s parametrem:

a) $\frac{2p-px}{2}=\frac{1+p-px}{p+1}$ **b)** $x+1-\frac{2x+a+1}{a}=\frac{a-x}{a}$ **c)** $\frac{x(p-1)-p(1-p)}{x+px-p(p+1)}=\frac{p^3-1}{p^3+1}$

4) Pro která $a\in\mathbb{R}$ má rovnice $\frac{a(x-2)}{x+2}=8$ řešení v množině celých záporných čísel?

5) Pro která $m\in\mathbb{R}$ má rovnice $\frac{y}{y-m}=m+1$ alespoň jeden záporný kořen?

6) Řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned}3x+2y+z&=3\\ x+y+z&=2\\ 4x+3y+2z&=5\end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned}x+y-2z&=0\\ x-y-8z&=0\\ 3x+5y+4z&=4\end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned}2x+3y&=11\\ 3x+2z&=13\\ 3y+4z&=29\end{aligned}$

d) $\begin{cases}\frac{1}{1-x+y}+\frac{1}{1-x-y}=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{x+y-1}+\frac{1}{y-x+1}=\frac{4}{3}\end{cases}$ **e)** $\begin{aligned}|x|-|x+y|&=1\\ y+|x-y|&=3\end{aligned}$ **f)** $\begin{cases}x_1-x_2+x_3+4x_4=18\\ 2x_1+3x_2-x_3+7x_4=-3\\ 3x_1+x_2+2x_3+4x_4=24\\ 4x_1+4x_2+4x_3-5x_4=19\end{cases}$

7) Určete, pro které hodnoty parametru *a* bude průsečík přímek $\begin{aligned}x+y-5&=0\\ 2x-y-a&=0\end{aligned}$ **a)** bodem II. kvadrantu, **b)** bodem osy I. a III. Kvadrantu.

8) Řešte soustavu rovnic s parametrem: a) $\begin{cases}ax+y+a=0\\ x+ay+1=0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}px-y+2=0\\ x+y-q=0\end{cases}$.

9) Peníze, které zůstaly po smrti kupce, byly rozděleny mezi jeho syny takto: Nejstarší dostal 100 zlatých a šestinu zbytku. Druhý dostal 200 zlatých a šestinu zbytku. Třetí dostal 300 zlatých a šestinu zbytku atd. Poslední syn dostal celý zbytek po vyplacení svých starších bratrů. Ukázalo se, že všichni synové dostali stejně. Kolik každý ze synů dostal a kolik jich vlastně bylo?

10) Marii je 24 let, přitom je dvakrát tak stará, jako byla Anna, když bylo Marii tolik let, jako je dnes Anně. Jak stará je Anna?

11) Poutniče! Zde odpočívá popel Diofantův. A čísla poví, je to zázrak, jak dlouhý byl jeho život. Šestina života patřila dětství. Ještě dvanáctina života uběhla, než se jeho brada pokryla chmýřím. Sedminu života strávil v bezdětném manželství. Uplynulo dalších pět let a radoval se z narození krásného syna, toho, kterému Osud vyměřil veselý a zářící život na této zemi, ale dlouhý jen polovinu toho, co otci. A v hlubokém smutku ukončil starý muž svou pout zde na zemi, čtyři roky po ztrátě syna. Řekni, jak dlouho žil Diofantos, než ho zastihla smrt.

12) Tři louky se stejně hustou trávou, která stejně rychle roste, mají obsahy ploch 3 1/3 ha, 10 ha a 24 ha. První louka stačila 12 býkům na 4 týdny a druhá louka stačila 21 býkům na 9 týdnů. Kolik býků se může na třetí louce pást 18 týdnů? *(Newtonova úloha)*

13) Kolikrát za den se na hodinkách minutová a hodinová ručička překryjí?

14) Na motocyklových závodech startovaly současně tři motorky. Druhá ujela za 1 h o 15 km méně než první motorka a o 3 km více než třetí motorka. Na trati nebyly zastávky. Přitom druhá motorka přijela do cíle o 12 min později než první a o 3 min dříve než třetí. Určete délku trati závodu, rychlost každé motorky a časy, které motorky potřebovaly k překonání trati.

15) Automobil projel vzdálenost mezi dvěma městy rychlostí 60 km/h a zpět se vracel rychlostí 40 km/h. Jaká je průměrná rychlost jízdy?

16) Vsuneme-li mezi cifry dvoumístného čísla cifru 7, dostaneme jeho jedenáctinásobek. Postavíme-li před ně jedničku, dostaneme pětinásobek. Které je to číslo?

17) Po silnici jede pomalu povoz s dlouhým kmenem. Od předního k zadnímu konci potřebujeme šestnáct kroků, od zadního k přednímu (při státě rychlosti naší i povozu) 112 kroků. Kolik kroků délky měl vlastně kmen?

18) První slitina je směsí dvou kovů v poměru 1 : 2, druhá je směsí stejných kovů v poměru 2 : 3. V jakém poměru máme tyto dvě slitiny dát do tavicí pece, abychom po vytavení získali novou slitinu kovů v poměru 17 : 27? (Všechny tři poměry odpovídají témuž pořadí obou kovů.)

19) Nádrž se plní třemi přívody, a to A, B, C. Přívody A a C se naplní za jednu hodinu (jsou-li otevřeny současně), přívody A a B za 45 minut, přívody B a C za 1 hodinu 30 minut. Jak dlouho by se nádrž naplnila každým přívodem zvlášť?

20) Malíř pokojů při přípravě růžové barvy smíchal červenou a bílou barvu v poměru 2 : 3. Aby získal sytější tón, přilil do hotové směsi ještě 9 litrů červené a 9 litrů bílé barvy. Tak se poměr červené a bílé barvy ve směsi změnil na 5 : 6. Kolik litrů červené a kolik litrů bílé barvy původně smíchal?

21) Novákovi mají doma bazén, do kterého napouštějí 25 m^3 vody. Přejí si, aby měla teplotu 24 °C. Proto míchají vodu z vodovodu o teplotě 11 °C s vodou z kotle o teplotě 76 °C. Kolik které vody spotřebují?

22) Motorová loď má na klidné vodě rychlost 12 km/h. Když jsme v ní bez přestávky ujeli 45 km po proudu řeky a 45 km zpět, trvalo nám to přesně 8 hodin. Jakou (stálou) rychlostí tekla řeka?

3.2 Kvadratické rovnice

1) Řešte rovnice:

a) $\dfrac{2r+1}{r}+\dfrac{4r}{2r+1}=5$ **b)** $\dfrac{2z-3}{z-1}+1=\dfrac{6z-z^2-6}{z-1}$ **c)** $(y+2)(y-2)+4(y-1)=5+y(6+y)-(y-5)^2$

2) Řešte kvadratickou rovnici s neznámou *x* a parametrem:

a) $(m-1)x^2-(m-2)x+2m-1=0$ **b)** $px^2+6p^2x+p=0$

3) **Řešte rovnice: a)** $x\cdot|x-5|+|x+4|-x=10$, **b)** $\dfrac{|y^2-4y|+3}{y^2+|y-5|}=1$.

4) Pro která $s\in\mathbb{R}$ mají rovnice $x^2+sx+1=0$ a $x^2+x+s=0$ jeden společný kořen?

5) Odvoďte vzorec pro řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0; a\neq 0$.

6) **Pro která *q* má** $x^2+2(q-4)x+q^2+6q=0$ **: a)** alespoň jeden reálný kořen, **b)** právě jeden reálný kořen, **c)** dva různé reálné kladné kořeny, **d)** dva různé záporné kořeny, **e)** jeden kladný reálný a druhý záporný reálný kořen.

7) Sestavte kvadratickou rovnici s kořeny, jejichž součin je roven jedné.

8) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny převráceným hodnotám kořenů rovnice $ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0; c\neq 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

9) Pro která *p* má $x^2+4x+p^2-7p+12=0$ jeden kořen roven nule? Určete druhý kořen.

10) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny číslům $\left(10-\sqrt{72}\right)^{-1}$ a $\left(10+6\sqrt{2}\right)^{-1}$.

11) Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny dvojnásobkům převrácených hodnot kořenů rovnice $x^2-6x+7=0$, aniž tuto rovnici řešíte.

12) V rovnici $4x^2-8x+c=0$ určete *c* tak, aby jeden kořen byl o jedna větší než druhý.

13) Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů rovnice $3x^2-15x+2=0$, aniž tuto rovnici řešíte.

14) **Řešte početně i graficky soustavu rovnic:**

a) $\begin{aligned}9x^2+16y^2&=144\\ x+y&=5\end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned}x^2-6x+y+5&=0\\ 2x-y-2&=0\end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned}x^2+y^2&=8\\ x-y-4&=0\end{aligned}$

15) Pro které hodnoty parametru *c* je přímka $y=2x+c$ tečnou, resp. sečnou křivky $y=x^2-2$?

16) Dělíme-li dvojciferné číslo o ciferném součtu 10 jeho ciferným součinem, obdržíme podíl 3 a zbytek 10. Určete toto číslo.

17) Ve škole byl uspořádán pro 3. a 4. ročníky turnaj ve volejbalu, kterého se zúčastnilo dvakrát více mužstev ze 3. ročníků než ze 4. ročníků. Hrálo se systémem každý s každým a za vítězství se přiděloval bod. Z utkání mezi 3. a 4. ročníky skončila třetina zápasů vítězstvím třeťáků, přitom třeťáci dosáhli o 40 % bodů více než čtvrťáci. Určete počty mužstev ze 4. a 3. ročníků.

18) Vypočtěte obsah obdélníku, jehož úhlopříčka je o 2 cm delší než jeho délka a o 16 cm delší než je jeho šířka.

19) V sudě bylo 20 l čistého lihu. Část tohoto lihu odlili a sud doplnili vodou. Potom odlili totéž množství směsi jako poprvé a opět dolili vodou. Tím vznikl 25% líh. Jaké množství lihu odlili poprvé?

20) Parník potřeboval na cestu 48 km proti proudu a 48 km zpět, dohromady 5 hodin. Jakou rychlostí by jel parník v klidné vodě, byla-li rychlost proudu 4 km/h?

3.3 Iracionální rovnice, rovnice vyšších řádů, rovnice řešené v $\mathbb{C}$

1) **Řešte iracionální rovnice:**

a) $\sqrt{x+1}=1-x$ **b)** $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$ **c)** $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+4}-\sqrt{5-x}$

d) $\sqrt{4x-8}+\sqrt{4x+8}+\sqrt{4x-4}=\sqrt{4x+28}$ **e)** $\sqrt[3]{x^2(x+3)+\sqrt[2]{x(9x+7)}}=x+1$

2) Řešte rovnice v množině komplexních čísel:

a) $\frac{1+2i}{1-i}z+\frac{1}{1+i}=0$ **b)** $\left(5-i^{-1}\right)\overline{z}+2z=22i$ **c)** $|z|-z=1+2i$

3) Řešte jako binomické rovnice:

a) $x^3-1=0$ **b)** $x^6-1+i\sqrt{3}=0$ **c)** $x^3+1=0$

4) Řešte reciproké rovnice: a) $2x^3-3x^2-3x+2=0$, **b)** $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$, **c)** $6x^6+5x^5-44x^4+44x^2-5x-6=0$.

5) Řešte vhodnou substitucí:

a) $\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}-3\right)\left(\frac{x^2+2}{x^2-4}+4\right)+10=0$ **b)** $\left(x^2+2x-2\right)\left(x^2+2x+3\right)+6=0$

c) $\frac{1}{\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)^2}-\frac{10}{\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}\right)^2+1}=2$

6) Řešte rovnice s komplexními koeficienty:

a) $x^2+(2-3\mathrm{i})x-5-5\mathrm{i}=0$ **b)** $x^2+2x+2\mathrm{i}+1=0$ **c)** $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

3.4 Nerovnice a jejich soustavy

1) Řešte nerovnice:

a) $\frac{x-1}{x+2}\geq\frac{x+3}{x-2}$ **b)** $\frac{f^2-16}{f+4}+\frac{f^2+6f+9}{f+3}<0$ **c)** $3x-4\leq 2x+5<4x-1$

2) Pro která $x\in\mathbb{R}$ je výraz $V=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ nezáporný, resp. nekladný?

3) Řešte početně i graficky nerovnici: $4x^2-4x-3\leq 0$.

4) Řešte nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $|2x+1|-|3-x|\geq x$ **b)** $v+|v-3|\leq 6$ **c)** $|x-1|+|x+1|\geq|x+3|$

5) Řešte iracionální nerovnice:

a) $x+2<\sqrt{x+14}$ **b)** $x<\sqrt{x^2+x-2}$ **c)** $\sqrt{9x-20}<x$

6) Řešte graficky soustavy nerovnic:

a) $\begin{cases} y<x+3 \\ y>-2x-3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |y|\leq 2 \\ |x|<2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ |y|\geq 1 \end{cases}$

4 FUNKCE

4.1 Elementární funkce a jejich vlastnosti

1) Určete definiční obor:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3-9x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

e) $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$ **f)** $f(x)=\log(24-2x-x^2)+\sqrt{\dfrac{x^2-x-6}{|x+4|}}$

2) Jsou dány funkce $f(x)=2x+3$, $g(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ **a** $h(x)=-x^2+3$**. Vypočtěte:**

a) $f(3)+2\cdot g(0)-h(1)$ **b)** $f(5)+g(-2)-h(-3)$ **c)** $f(g(1))$

d) $g(f(-2))$ **e)** $h(f(g(0)))$ **f)** $f(1+g(1)+h(f(-1)))$

3) Určete průsečíky funkce se soustavou souřadnou:

a) $y=2x+1$ **b)** $y=x^2-1$ **c)** $y=x^3+1$ **d)** $y=\dfrac{5}{2x^2-1}$ **e)** $y=\dfrac{2x+3}{x+3}$

f) $y=7$ **g)** $y=x^2-7x+12$ **h)** $y=|x+1|-1$ **i)** $y=|x+1|-|2x|$ **j)** $y=1+\sqrt{x}$

4) Znázorněte do grafu relaci: a) $N=\{[x;y]\in\mathbb{R}^2; y\le 2\sin x; y\ge 2^x-2; x>0; y<1,5\}$,

b) $N=\{[x;y]\in\mathbb{R}^2; y\ge\log_2 x; y<2^x; x>0; y<-x+5\}$.

5) Sestrojte (načrtněte) grafy funkcí a porovnejte:

a) $f: y=\dfrac{x}{1-x}; g: y=\dfrac{|x|}{1-|x|}; h: y=\left|\dfrac{x}{1-x}\right|$ **b)** $y=2x-3; y=|2x-3|; y=2|x|-3; y=|2|x|-3|$

6) Určete, které funkce jsou liché, resp. sudé:

a) $y=x^4+x^2-1$ **b)** $y=2x$ **c)** $y=5+2|x|$ **d)** $y=x^2+x$

7) Sestrojte v téže soustavě souřadnic grafy funkcí $f(x)=-2x+1, g(x)=x-2$ **a určete všechna** $x\in\mathbb{R}$**, pro něž platí: a)** $f(x)=g(x)$ **, b)** $f(x)<g(x)$**, c)** $f(x)\ge g(x)$**.**

8) Načrtněte grafy funkcí:

a) $y=\operatorname{sgn} x$ **b)** $y=\operatorname{sgn}(2x-4)$ **c)** $y=(3x+1)\cdot\operatorname{sgn}(3x+1)$ **d)** $y=x-1+\operatorname{sgn}(x-1)$

9) Načrtněte grafy funkcí: a) $y=|x-1|-|x+1|$ **b)** $y=|x-2|-2\cdot|x-5|+1$

10) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y=|x^2-2x-1|$ **b)** $y=|x^2-2x|-1$ **c)** $y=x^2-2|x|-1$ **d)** $y=x^2-|2x-1|$

11) Načrtněte grafy těchto funkcí:

a) $y=x\cdot|x-1|$ **b)** $y=|x+|x^2-1||$ **c)** $y=|1-x^2|+|x^2-4|$ **d)** $y=|0,5x^2-4|x|+5|$

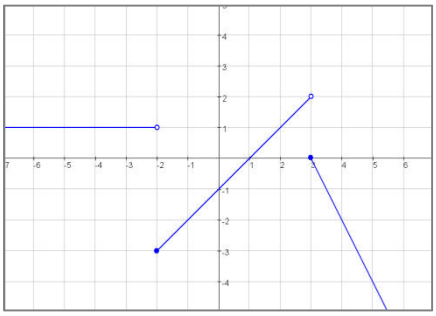
12) Napište rovnici kvadratické funkce, jejíž graf prochází body: $[1;-1],[0;1],[-1;5]$.

13) Uvažujme množinu všech kvádrů, z nichž má každý čtvercovou podstavu a součet délek všech jeho hran je 120 cm. Určete délku hrany podstavy toho z nich (pokud existuje), jehož povrch je největší.

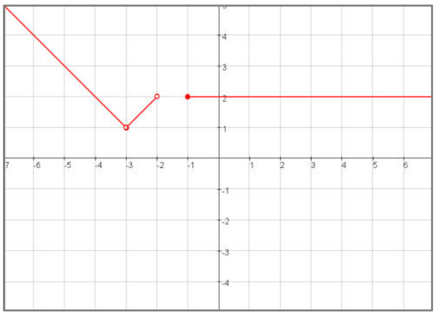
14) Pletivem dlouhým 8 m máme ohradit obdélníkový záhon, jehož jednu stranu tvoří zeď. Jaká by měla být délka záhonu, aby byl obsah největší.

15) Z grafu určete definiční obor a obor hodnot funkce:

a) funkce *f*



b) funkce *g*



16) Zahradní bazén se rovnoměrně napouštěl jedním čerpadlem. V devět hodin v něm bylo 30 hl vody, v 15 hodin odpoledne téhož dne obsahoval 300 hl vody a byl právě zcela zaplněn. **Určete: a)** funkci *f* vyjadřující objem vody (v hl) v bazénu v závislosti na čase (v hod) včetně D_f, H_f, **b)** v kolik hodin se začal bazén napouštět, **c)** v kolik hodin byl bazén z poloviny zaplněn, **d)** kolik vody bylo v bazénu ve 14 hodin.

17) Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Teplota *f* ve Fahrenheitových stupních je lineární funkcí teploty *c* v Celsiových stupních. Přitom hodnotě 8 °C odpovídá 46,4 °F a 24 °C odpovídá 75,2 °F. **a)** Určete převodní vzorce mezi °C a °F a naopak. **b)** Určete hodnotu ve Fahrenheitových stupních, která odpovídá 20 °C.

18) Určete k funkci *f* funkcí inverzní, dále určete její definiční obor a obor hodnot:

a) $y = x^2 - 4$ **b)** $y = x^2 - 4x + 3$ **c)** $y = 2x^2 + 4x - 2$

4.2 Logaritmické a exponenciální funkce a (ne)rovnice

1) Porovnejte čísla podle velikosti (bez použití kalkulátoru):

a) $(-1,3)^{-2}; (0,8)^{-2}; (-0,9)^{-2}; (1,3)^{-2}; (-6,4)^{-2}$ **b)** $8^{-3}; (-1,4)^{-3}; 1^{-3}; (0,6)^{-3}; (-0,6)^{-3}$

2) Načrtněte grafy funkcí:

a) $y = 2^x, y = 2^x + 2, y = 2^{x-1}, y = 2^{x+1} - 1$ **b)** $y = \log_2 x; y = \log_2(x-1); y = |\log_2(x-1) + 1|$

3) Určete definiční obor funkcí:

a) $y = \log \frac{1}{x-4}$ **b)** $y = \log(5-2x)$ **c)** $y = \log\left(\frac{1}{3}x^2\right)$ **d)** $y = \log(x^2 - 3)$ **e)** $y = \log \frac{x+1}{1-x}$

4) Vypočtěte: a) $\log_4 \frac{1}{256} - \log 10 + \log_3 243$, **b)** $\frac{\log_2 16 - 3^{\log_4 4}}{\log 0,1}$, **c)** $\log 0,001 \cdot \log_3 9 - \log_3 \frac{1}{9}$.

5) Vyjádřete jako jediný logaritmus (*a*, *b*, *c*, *d*, *n* > 0):

a) $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c$ **b)** $\ln a - b \ln c + \frac{1}{n} \ln d$ **c)** $\frac{1}{3} \ln a - \frac{1}{3} \ln b + \frac{1}{2} \ln c + \frac{1}{2} \ln d$

6) Rozhodněte, zda platí:

a) $\log_{0,4} 7 < \log_{0,4} 6$ **b)** $\left(\frac{6}{7}\right)^{2,5} < \left(\frac{6}{7}\right)^{2,4}$ **c)** $(4,9)^{-4} < (4,8)^{-4}$ **d)** $(-1,5)^3 < (1,5)^3$

7) Je dána funkce *f*. Určete k ní inverzní funkci f^{-1} a stanovte definiční obor a obor hodnot obou funkcí: a) $f: y = 2^x + 1$ **b)** $y = \log_3(x-1) + 1$ **c)** $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ **(bez oborů).**

8) Určete průsečíky funkcí $f: y = 4^{x+1} - 9, g: y = 2^{2x} + 3$.

9) Řešte rovnice:

a) $7^{x+2}+2\cdot 7^{x-1}=345$ **b)** $4^{x+1}+4^{1-x}=17$ **c)** $\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$ **d)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$

e) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36$ **f)** $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ **g)** $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ **h)** $3^{2x}-3^x=702$

i) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$ **j)** $27^x+4\cdot 9^x=\frac{1}{3}\cdot 3^{2x+3}-2\cdot 3^{x+1}$ **k)** $\left(3+\sqrt{8}\right)^x+\left(3-\sqrt{8}\right)^x=34$

10) Řešte rovnice:

a) $\log(4{,}5-x)=\log 4{,}5-\log x$ **b)** $\frac{1}{1+\log x}+\frac{5}{3-\log x}=3$ **c)** $\log x^2+\log\sqrt{x}-\log\frac{1}{x}=14$

d) $2\log_2\frac{x-7}{x-1}+\log_2\frac{x-1}{x+1}=1$ **e)** $\log_3[2+2\log_4(2x-3)]=1$ **f)** $x^{\log x}+10x^{-\log x}=11$

11) Řešte nerovnice:

a) $\log_{0,25}\left(x^2-4x-32\right)\geq\log_{0,25}\left(x^2-8x-20\right)$ **b)** $\log\sqrt{x^2-4}-\log\sqrt{x+2}<\log 5$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)\geq -3$ **d)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}<\frac{1}{9}$ **e)** $1\leq\frac{2\log x+3}{3}\leq\frac{5}{3}$ **f)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1+x}{1-x}}>243$ **g)** $|\log x-1|<2$

12) Řešte (ne)rovnice: a) $\log_3 x-2\log_{\frac{1}{3}}x=6$ **b)** $\log_x\left(x^2+3x-3\right)>0$ **c)** $\frac{1}{\log x}+\frac{1}{1-\log x}>1$

13) Řešte soustavy rovnic:

a) $\begin{matrix}3^x\cdot 2^y=576\\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4\end{matrix}$ **b)** $\begin{matrix}3^{\log x}+5^{\log y}=14\\ 3^{2\log x}-5^{2\log y}=56\end{matrix}$ **c)** $\begin{cases}\sqrt[x]{x+y}=3\\ 2^{x-2}\cdot(x+y)=9\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}2^{2x}+3^y=13\\ 2\cdot 4^x-3^y=-1\end{cases}$

4.3 Goniometrické funkce a (ne)rovnice

1) Určete základní velikost orientovaného úhlu, je-li jedna jeho velikost:

a) 1800° **b)** –333° **c)** –1567° **d)** 19π **e)** $-\frac{83}{5}\pi$ **f)** $-1065°17'$ **g)** $-450°10'$

2) Vypočtěte (bez použití kalkulátoru nebo tabulek):

a) $\cos\frac{13}{4}\pi$ **b)** $\sin\frac{3}{2}\pi$ **c)** $\sin\frac{5}{4}\pi$ **d)** $\cos\frac{5}{6}\pi$ **e)** $\mathrm{tg}\,\frac{5}{4}\pi$ **f)** $\mathrm{cotg}\,\frac{11}{6}\pi$ **g)** $\sin\frac{4}{3}\pi$ **h)** $\sin 180°$

i) $\cos 225°$ **j)** $\mathrm{tg}\,135°$ **k)** $\mathrm{cotg}\,150°$ **l)** $\mathrm{cotg}\,180°$

3) Určete všechny úhly (ve stupních a v radiánech), **pro které platí:**

a) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ **b)** $\sin\alpha=0$ **c)** $\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt{3}$ **d)** $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $\cos\alpha=1$

g) $\mathrm{cotg}\,\alpha=-1$ **h)** $\cos\alpha=-1$ **i)** $\cos\alpha=-0{,}5$ **j)** $\cos\alpha=0$

4) Bez použití tabulek či kalkulaček vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens v bodě x = 75°.

5) Vypočtěte (bez užití tabulek nebo kalkulátorů):

a) $\sin 12°\cos 18°+\sin 18°\cos 12°$ **b)** $\cos^2 105°-\sin^2 15°$

c) $(\sin 15°+\sin 75°)(\cos 75°-\cos 15°)$ **d)** $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$

e) $\frac{\sin 20°\cos 5°-\cos 20°\sin 5°}{\cos 10°\cos 5°-\sin 10°\sin 5°}$ **f)** $\sin x;\cos x;\mathrm{tg}\,x$, je-li $\cos 2x=0{,}6\wedge x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$

6) Zjednodušte výrazy:

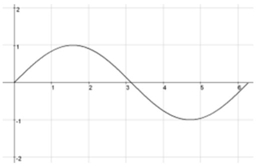
a) $\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}-\frac{2\sin x}{\cos^2 x}$ **b)** $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

c) $\dfrac{\cos 3x+\cos x}{\cos 4x+\cos 2x}+\dfrac{\sin 3x+\sin x}{\sin 4x+\sin 2x}$ d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}$ e) $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}-\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

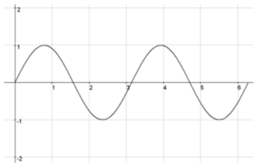
e) $\sin^3 x+\cos^3 x$, je-li $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x$, je-li $\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x=m$

7) Přiřaďte ke grafům funkcí jejich předpisy:

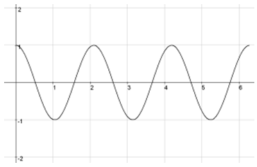
A)



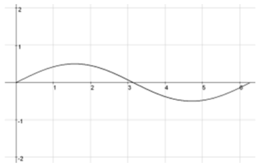
B)



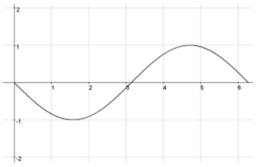
C)



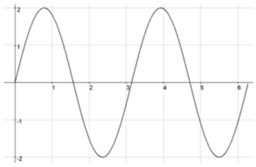
D)



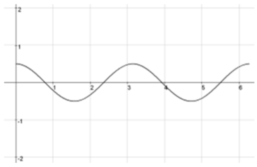
E)



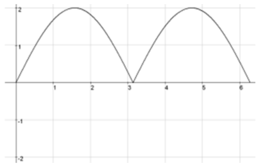
F)



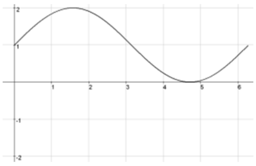
G)



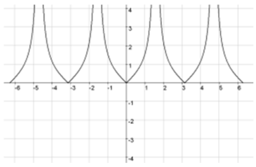
H)



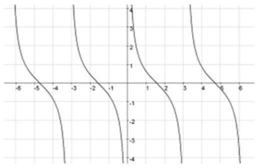
I)



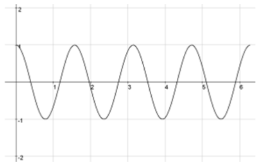
J)



K)



L)



a) $y=\sin 2x$ **b)** $y=\cos 3x$ **c)** $y=-\sin x$ **d)** $y=|\operatorname{tg} x|$

e) $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ **f)** $y=\sin x$ **g)** $y=\operatorname{cotg} x$ **h)** $y=\frac{1}{2}\sin x$

i) $y=\cos 4x$ **j)** $y=|2\sin x|$ **k)** $y=2\sin 2x$ **l)** $y=\sin x+1$

8) Řešte (ne)rovnice:

a) $2\sin\left(2x+\frac{1}{6}\pi\right)=1$ **b)** $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-\sqrt{3}=0$ **c)** $2\sin^2 x+7\cos x-5=0$

d) $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x}+\cos^2 x\cdot\operatorname{tg} x=1$ **e)** $\cos x>0{,}5$ pro $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$ **f)** $\sin x<0{,}5$ pro $x\in\left\langle 0;\frac{\pi}{2}\right\rangle$

g) $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$ **h)** $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ **i)** $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-3=0$

j) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$ **k)** $\operatorname{tg}(2x-30°)-\operatorname{tg}(x+60°)=0$

9) Odvoďte vzorce: a) $\sin(x\pm y)$, **b)** $\cos(x\pm y)$, **c)** $\sin x\pm\sin y$, **d)** $\cos x\pm\cos y$

10) S využitím vlastností inverzní funkce načrtněte graf cyklometrické funkce:

a) $y=\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$ **b)** $y=\frac{1}{2}\arccos(x+1)$ **c)** $y=\operatorname{arctg} 2x$

11) Jakou absolutní hodnotu má komplexní číslo $z=(\cos\alpha+\cos\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta)$.

5 PLANIMETRIE

5.1 Početní úlohy

1) Určete všechny hodnoty goniometrických funkcí úhlu α v pravoúhlém trojúhelníku, je-li dáno tg α = $\frac{3}{4}$, aniž tento úhel počítáte.

2) **Řešte obecný trojúhelník**, **je-li dáno:**

a) a = 65; b = 46; α = 42° 30′ **b)** $a = 4\,\mathrm{cm}, b = 8\,\mathrm{cm}, c = 6\,\mathrm{cm}$

3) Z tyče kruhové průřezu o poloměru 35 mm má být vyfrézována tyč, jejímž průměrem je pravidelný osmiúhelník. Vypočítejte délku strany tohoto osmiúhelníku a vzdálenost jeho protilehlých stran.

4) Jsou dány dvě kružnice k_1 (O_1; 4cm), k_2 (O_2; 6cm), $|O_1O_2|$ = 5 cm. Označte P_1, P_2 průsečíky daných dvou kružnic. Vypočítejte délku úsečky P_1P_2 a její vzdálenosti od středů obou kružnic.

5) V pravoúhlém trojúhelníku *ABC* je dána odvěsna b = 10 cm a výška na přeponu v_c = 8 cm. Vypočítejte délku odvěsny a a délku přepony c.

6) Užitím středového a obvodového úhlu určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku, jehož vrcholy odpovídají číslům 4, 8, 11, 12 na ciferníku hodin.

7) Určete délky úhlopříček lichoběžníku *ABCD*, je-li: $a = 10\,\mathrm{cm}, v = 3\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 60°, \beta = 30°$.

8) Z pozorovatelny 15 m vysoké a vzdálené 15 m od břehu řeky se jeví šířka řeky v zorném úhlu 15°. Vypočítejte šířku řeky.

9) Letadlo letí ve výšce 10 km k pozorovatelně. V okamžiku 1. měření bylo vidět pod výškovým úhlem 30°, při 2. měření pod úhlem 50°. Určete rychlost letadla, víte-li, že doba mezi oběma měřeními byla 36 sekund.

10) Nad úsečkou délky 2r je jako nad průměrem opsána půlkružnice a sestrojen obdélník, jehož druhý rozměr je r. V jakém poměru dělí půlkružnice jednu jeho úhlopříčku?

11) V trojúhelníku *ABC* je dáno $|AB| = c = 6\,\mathrm{cm}$, $v_c = 1{,}2\,\mathrm{cm}$, $t_c = 1{,}3\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte délky stran *BC* a *AC*.

12) Kosočtverec je určen obsahem S = 150 cm^2 a poměrem velikostí úhlopříček e : f = 3 : 4. Vypočtěte délku strany kosočtverce, výšku kosočtverce a délky úhlopříček kosočtverce.

13) Je dán trojúhelník *ABC*, jemuž je opsána kružnice k se středem S. Úhel *ASB* má velikost 50°, úhel *BSC* má velikost 80°. Určete velikost úhlu *ACB*.

14) V trojúhelníku *ABC* je $\alpha = 50°, \beta = 60°$. Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná stranu *AC* v bodě D. Seřaďte podle velikosti úsečky *AB*, *BC*, *CD*, *AD*, *BD*, *AC*.

15) Kolik vrcholů má pravidelný n-úhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají velikost 144°?

16) Určete poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku, je-li délka jeho strany 10 cm.

17) Vypočtěte součet velikostí vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku.

18) V trojúhelníku *ABC* je $\alpha > \beta$. Jaký úhel svírá osa úhlu γ s výškou na stranu c.

19) Jsou dány čtverce *ABCD* a *DEFG* se společným vrcholem D, přičemž body B, D, F leží na přímce; dále platí: $|DE| = 3\,cm$, $|AD| = 6\,cm$. Vypočtěte obvod a obsah lichoběžníku *ACEG*.

20) Předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru 6370 km. **a)** Jak daleko od pozorovatele je bod na obzoru viditelné části povrchu Země, je-li pozorovatel v letadle letícím ve výšce 4 km nad Zemí? **b)** Z jaké výšky nad Zemí by viděl kosmonaut jednu desetinu zemského povrchu?

21) V rovnoběžníku *ABCD* (o velikosti stran a, b) jsou e, f velikosti úhlopříček. Vyjádřete $e^2 + f^2$ pomocí velikostí stran a, b.

22) Mezikruží se středem *S* o vnějším poloměru r_1 a vnitřním poloměru r_2 je rozděleno kružnicí se středem *S* a poloměru *r* na dvě mezikruží, která mají stejný obsah. Vypočtěte velikost poloměru *r*.

23) Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru 10 cm, víte-li, že tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru 2 : 3.

24) Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky 22 cm a 12 cm, je-li jeho výška o 1 cm kratší než délka ramene.

25) **Určete velikosti všech vnitřních úhlů a poměr délek stran trojúhelníku, jestliže platí:**

a) $a:b=2:3, \alpha:\beta=1:2$ **b)** $\alpha:\beta:\gamma=3:5:10$

26) Určete velikosti vnitřních úhlů a obsah lichoběžníku *ABCD*, je-li: $a=30, b=13, c=16, d=15$.

27) Dvě síly o velikostech F_1 = 10 N, F_2 = 5 N působí v jednom bodě a svírají úhel $\alpha=52°30'$. Jak velká musí být třetí síla působící v tomto bodě, aby zrušila účinek dvou původních sil? Vypočítejte velikost úhlu, který svírá třetí síla se silou F_2.

28) Před rovinným zrcadlem jsou dva body *A*, *B* vzdálené od sebe 36 cm. Vzdálenost bodu *A* od zrcadla je 7 cm, bodu *B* 18 cm. Pod jakým úhlem je třeba vést světelný paprsek bodem *A*, aby po odrazu procházel bodem *B*?

29) Orientační běžec vyběhl z místa *A* pod azimutem 93° do místa *B*, vzdáleného od místa *A* 920 m. Z místa *B* běžel pod azimutem 203°do místa *C*, vzdáleného od místa *B* 640 m. **a)** Určete, pod jakým azimutem musí běžet z místa *C*, aby se vrátil do místa *A*. **b)** Určete celkovou délku orientačního běhu.

30) Padák je v okamžiku, kdy jej vidíme, ve výškovém úhlu $\alpha=26°10'$, výška Slunce na horizontem je $\beta=29°15'$ a stín padáku je od nás vzdálen 92 m směrem k patě výšky padáku. Jak vysoko je padák?

31) Trojúhelníkový pozemek má dvě strany 10 loktů dlouhé a třetí 12 loktů. Uprostřed trojúhelníkového pozemku je čtvercový pozemek. Všechny vrcholy čtverce leží na stranách trojúhelníku. Jaký je obsah čtvercového pozemku?

32) Letadlo letí k východu ve výšce 800 m. Pozorovatel v letadle vidí plynojem směrem k jihovýchodu pod hloubkovým úhlem 29°. O patnáct sekund později vidí týž plynojem ve směru přesně jihozápadním pod stejným hloubkovým úhlem. Jaká je rychlost letadla?

33) Do daného čtverce *ABCD*, kde $|AB|=a$, je vepsán rovnostranný trojúhelník *AXY* tak, že $X \in BC$ a $Y \in CD$. Vyjádřete velikost strany trojúhelníku pomocí velikosti strany čtverce.

34) Dokažte mocnost bodu ke kružnici.

5.2 Konstrukční úlohy

1) **Sestrojte trojúhelník, je-li dáno:**

a) a, α, t_a **b)** a, α, v_b **c)** a, v_b, t_b **d)** t_a, t_b, t_c **e)** α, v_b, r

f) v_a, v_b, t_c **g)** $a:b:c, v_a$ **h)** v_a, v_b, v_c **i)** $a, \beta, b-c$ **j)** $a+b+c, \gamma, v_c$

2) **Sestrojte čtyřúhelník, je-li dáno:**

a) tětivový čtyřúhelník *ABCD*: *a*, *b*, α, *r* **b)** deltoid *ABCD* (*AC* je osa): a, e, f

c) lichoběžník *ABCD*: a, c, e, f **d)** tečnový čtyřúhelník *ABCD*: *a*, *b*, α, ρ

e) čtyřúhelník *ABCD*: *c*, *d*, α, γ, δ **f)** rovnoběžník *ABCD*: *e*, *f*, ω

3) Je dána kružnice $k(S; r=4\text{cm})$ a bod *M* tak, že $|SM|=3\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy kružnice *k*, které procházejí bodem *M* a jsou jím děleny v poměru 1 : 3.

4) Jsou dány dvě různoběžky p, q a bod C neležící na žádné z nich a neležící na jejich ose. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby bod C byl jeho vrcholem a jeho zbývající vrcholy ležely po řadě na přímkách p, q. Nalezněte všechna řešení.

5) Jsou dány rovnoběžky a, p a přímka c, která je s nimi různoběžná. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce a, bod C na přímce c a úhlopříčka BD na přímce p.

6) Sestrojte kružnici, která má střed na dané přímce s, dotýká se dané přímky t, přičemž přímky t, s jsou různoběžné a kružnice prochází daným bodem A, který leží v ostrém úhlu přímek t, s.

7) Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1 (O; 4cm), k_2 (O; 2cm) a přímka p, která je sečnou obou kružnic. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají přímky p i obou kružnic; přitom k_1 uvnitř a k_2 vně.

8) **Sestrojte úsečky o délce: a)** $\sqrt{15}$, **b)** $\sqrt{11}$, **c)** $\sqrt{15}-\sqrt{13}$, **d)** $\sqrt{8}$

9) **Jsou dány úsečky délek *a*, *b*, *c*, *d*** $(a>b>c>d)$**. Sestrojte úsečku *x* o velikosti:**

a) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$ **b)** $x=\dfrac{a\cdot\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{ad}}$ **c)** $x=\dfrac{c\cdot\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+d^2}}$

10) Je dána kružnice k se středem S a poloměrem 5 cm; dále je dána její sečna s procházející bodem S. Určete množinu středů všech kružnic s poloměrem 1,5 cm, které se vždy dotýkají dané kružnice k a dané sečny s.

11) Je dána kružnice $l(L, r=5\,\text{cm})$ a jedna z jejích tětiv XY o velikosti 7 cm. Určete množinu středů všech kružnic s poloměrem 1,5 cm, dotýkajících se dané kružnice a tětivy. Kružnice sestrojte.

12) Sestrojte všechny kružnice, které mají r = 2 cm a procházejí daným bodem A a dotýkají se dané přímky p.

13) Jsou dány body A, B, které leží v jedné polorovině určené přímkou p. Určete na přímce p bod X tak, aby součet $|AX|+|BX|$ byl nejmenší.

14) Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník AYZ tak, aby $Y\in BC, Z\in CD$.

15) Je dána přímka p a body A, B ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p (AB není kolmá na p). Sestrojte na přímce p bod V tak, aby osa úhlu AVB ležela v přímce p.

16) Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X, Y na hranici trojúhelníky.

17) Jsou dány čtyři kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 a bod S. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ se středem S, jehož vrcholy A, B, C, D leží po řadě na kružnicích k_1, k_2, k_3, k_4.

18) Je dána kružnice k = (S, r), vnější bod M a úsečka AB o velikosti d < r. Bodem M sestrojte přímku p tak, aby na dané kružnici k vytínala tětivu o velikosti d.

19) Je dána kružnice $k(S, 3\,\text{cm})$ a bod A, $|SA|=1{,}5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce 5,5 cm, které procházejí bodem A.

20) Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka délky r. Sestrojte všechny kružnice k se středem na přímce a, poloměrem r, které na přímce b vytínají tětivu délky r.

21) Je dána kružnice $k(S, r)$. Sestrojte pravidelný n-úhelník vepsaný do této kružnice.

22) Je dána kružnice $k(S, r)$. Sestrojte úsečku, jejíž délka je rovna obvodu kružnice.

23) Jsou dány dvě různoběžné přímky p, q a bod A (resp. kružnice k). Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají daných přímek a procházejí bodem A (resp. dotýkají se kružnice k).

6 STEREOMETRIE

6.1 Stereometrie – polohové vlastnosti

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*, dále body *K*, *L*, *M*, *N*, které jsou po řadě středy hran *AB*, *BF*, *GH*, *EH*. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek: **a)** *KF*, *EL*, **b)** *AC*, *MN*, **c)** *KM*, *LN*, **d)** *HL*, *CN*.

2) Je dána krychle *ABCDEFGH*, dále body *K*, *L*, *M*, *N*, které jsou po řadě středy stěn *ABC*, *BCG*, *FGH*, *ADH*. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin: **a)** *ABG*, *LNH*, **b)** *DEG*, *ACF*, **c)** *KLM*, *CDE*.

3) Je dána krychle *ABCDEFGH* a střed dolní podstavy *S*. Bodem *D* sestrojte rovnoběžku s přímkou *SF* a rozhodněte, ve kterém bodě protne krychli.

4) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV* a střed *M* hrany *BV*. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky *VD* a *ACM*.

5) Bod *M* je středem hrany *BF* krychle *ABCDEFGH*. Veďte bodem *M* rovinu rovnoběžnou s rovinou **a)** *ADH*, **b)** *ABC*, **c)** *ACH*, **d)** *BDG*.

6) Je dán čtyřstěn *ABCD*, body *K*, *L*, *M* jsou po řadě středy hran *AD*, *BD*, *CD*. Určete vzájemnou polohu tří rovin: **a)** *ABD*, *KLM*, *BCD*, **b)** *ABC*, *BKM*, *ACD*, **c)** *ABC*, *ABD*, *ABM*, **d)** *ABC*, *KLM*, *BCD*.

7) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte řez tělesa rovinou ρ určenou třemi body:

a) *P*, *Q*, *R*: $P \in \mapsto DC, |PD| = \frac{3}{2}|CD|, R \in DH, |DR| = 3|RH|, Q \in \mapsto DA, |AQ| = \frac{1}{4}|AD|$,

b) *P*, *Q*, *S*: $S \in \mapsto CG, |CG| = 4|GS|$

c) $P \in \mapsto DC, |PD| = \frac{3}{2}|CD|, R \in DH,\ |DR| = 3|RH|, Q \in DA, |AQ| = \frac{1}{4}|AD|$.

8) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Sestrojte řez tělesa rovinou ρ určenou třemi body:

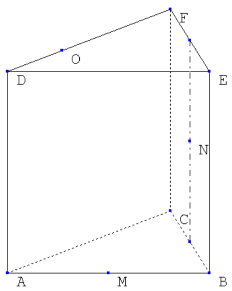
a) *P*, *Q*, *R*: jsou po řadě středy hran *AB*, *BC*, *DV*,

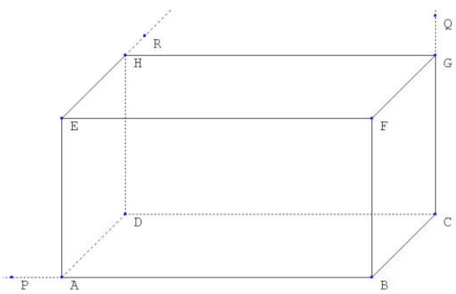
b) *R*, *S*, *T*: $S \in BV, |VS| = 2|BS|, T \in CV, |TV| = 4|TC|$.

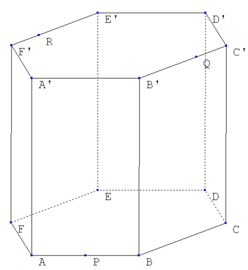
9) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Sestrojte průsečnici *p* rovin: a) *ACG*, *AFH*, **b)** *ACF*, *BEG*, **c)** *BCG*, *AEO* (*O* je střed stěny *BCGF*), **d)** *ABM*, *CDM* (*M* je střed *FG*), **e)** *ACE*, *BHP*, **f)** *ACG*, *ABG.*

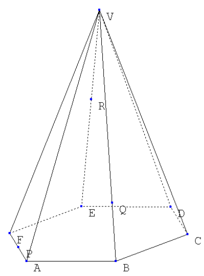
10) Sestrojte řez tělesa rovinou danou body:

a) *M*, *N*, *O* **b)** *P*, *Q*, *R* **c)** *P*, *Q*, *R* **d)** *P*, *Q*, *R*









11) Určete průsečíky přímky *p* s krychlí *ABCDEFGH*, je-li:

a) $p = GM, M \in \mapsto BA, |BM| = 3|AM|$, **b)** $p = MN, N \in \mapsto HG, |HN| = 3|GN|$.

12) Je dána krychle *ABCDEFGH* (*a* = 4 cm)**. Body *P*, *Q* jsou po řadě středy hran *BC* a *EH*. Sestrojte mnohoúhelník, který je shodný s řezem krychle rovinou: a)** *ACG*, **b)** *ACF*, **c)** *CGQ*, **d)** *ACQ.*

13) Sestrojte řez kvádru *ABCDEFGH* rovinou, která prochází přímkou *BG* a je rovnoběžná s přímkou: a) *CH*, **b)** *CP* (*P* střed hrany *AD*), **c)** *CQ* (*Q* střed hrany *EH*).

14) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, dále bod *S* na polopřímce *DA* tak, že $\frac{3}{2}|DA|=|DS|$ a bod *R* na hraně *VC* tak, že $|VR|:|RC|=1:4$. Nalezněte průsečíky přímky *SR* s daným tělesem.

6.2 Stereometrie – metrické vlastnosti

1) Je dána krychle *ABCDEFGH*, *a* = 4 cm. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžných přímek *p* ≡ *KL* , *q* ≡ *MN*, přičemž body *K*, *L*, *M*, *N* jsou postupně středy hran *AB*, *BC*, *EH* a *GH*.

2) Výška pravidelného čtyřbokého jehlanu *ABCDV* je rovna délce jeho podstavné hrany. Vypočítejte odchylku rovin dvou protějších stěn.

3) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Vypočtěte vzdálenost přímek *AC*, *SR*, je-li *S* střed hrany *EH* a *R* střed hrany *HG*.

4) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a.* Vypočtěte vzdálenost vrcholu *F* od přímky *BH.*

5) Je dán kvádr *ABCDEFGH* se čtvercovou podstavou o hraně délky *a* = 1 cm a výšce *b* = 3 cm. Na hraně *CG* je dán bod *X* tak, že platí $|GX|=5|CX|$. Určete odchylku rovin $\alpha \equiv ABG$ a $\beta \equiv ABX$.

6) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod *S* je středem jeho podstavy, bod *P* je středem hrany *AV*. Určete odchylku přímek:

a) *BC*, *SV*, **b)** *AB*, *CV*, **c)** *AD*, *CV* **d)** *BV*, *CP*, **e)** *SV*, *BP*.

7) Podstavou trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnoramenný trojúhelník *ABC*; $|AB|=3\,\text{cm}$, $|AC|=|BC|=4\,\text{cm}; |AA'|=4\,\text{cm}$. Určete odchylku přímek:

a) BA', BC', **b)** $A'B', BC$, **c)** AB', BC, **d)** $A'C, BC'$.

8) Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; $|AB|=a=2{,}5\,\text{cm}; |AA'|=b=4\,\text{cm}$. Určete početně odchylku přímek: **a)** DE', BD', **b)** BC', CF'.

9) Je dána krychle s hranou délky *a*. Určete odchylku rovin *ACG*, *BCH*.

10) Je dána krychle *ABCDEFGH*. Určete odchylku přímky *p* a roviny ρ:

a) $p=\leftrightarrow XY; \rho=\leftrightarrow ABC$; bod *X* střed hrany *EH*, bod *Y* je bodem hrany *BF*: $|BY|:|YF|=1:3$,

b) $p=\leftrightarrow QR; \rho=\leftrightarrow ABE$; bod *Q* střed hrany *BF*, bod *R* je bodem hrany *GH*: $|HR|=\frac{1}{3}|GH|$,

c) $p=\leftrightarrow CE; \rho=\leftrightarrow BDM$; bod *M* je středem hrany *CG*.

11) Je dán kvádr *ABCDEFGH*, $|AB|=5\,\text{cm}, |BC|=3\,\text{cm}, |AE|=6\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku přímky *BG* a roviny *BCE*.

12) Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*. Určete odchylku **a)** rovin dvou stěn čtyřstěnu, **b)** přímky hrany a roviny stěny, která tuto přímku neosahuje.

13) Bod *M* je středem hrany *AV* pravidelného šestibokého jehlanu *ABCDEFV*, $|AB|=a; v=2a$. Určete vzdálenost bodu *M* od přímky **a)** *AB*, **b)** *CV*.

14) Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ má podstavnou hranu *a*, jeho boční stěny jsou čtverce, *S* je střed horní podstavy. Určete vzdálenost přímek: **a)** $AD, E'F'$, **b)** AS, BC', **c)** BE', CD'.

15) Je dána krychle *ABCDEFGH* s hranou délky *a*. Body *K*, *L*, *M*, *X*, *Y*, *Z* jsou po řadě středy hran *AB*, *EF*, *EH*, *BC*, *CD*, *FG*. Bod *R* je bodem hrany *AD*, $|AR|=\frac{1}{5}a$, bod *S* je bodem hrany *BC*, $|CS|=\frac{1}{4}a$. Určete vzdálenost rovin: **a)** ABC, EFG, **b)** $\alpha, \beta, R\in\alpha, S\in\beta, \alpha \parallel \beta \parallel\leftrightarrow ABE$ **c)** ABM, GHX, **d)** KLM, XYZ.

6.3 Stereometrie – povrchy a objemy těles

1) Vypočítejte povrch a objem pravidelného osmistěnu, je-li délka jeho hrany 5 cm.

2) Vypočtěte objem a povrch rotačního válce vepsaného kouli o poloměru R, je-li výška válce $v = \frac{4}{3}R$.

3) Zvětší-li se hrana dané krychle o 5 cm, zvětší se její objem o 485 cm^3. Určete objem původní krychle.

4) Je dán rotační kužel. Středem jeho výšky je veden řez rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy, který rozdělí kužel na dvě tělesa. Vypočtěte poměr objemů takto vzniklých těles.

5) Délky hran čtyřbokého hranolu jsou v poměru $a : b : c = 2 : 4 : 5$, povrch hranolu je 57 cm^2. Vypočtěte jeho objem.

6) Objem pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu je 3 848 dm^3 a výška v = 24 dm. Hrana horní podstavy je o 7 dm delší než hrana dolní podstavy. Vypočtěte obsahy horní a dolní podstavy.

7) Dva rotační válce mají výšky $v_1 = 64$, $v_2 = 27$. Plášť každého z nich má týž obsah jako podstava druhého válce. V jakém poměru jsou objemy válců?

8) Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má objem V = 1510 cm^3, podstavné hrany mají délky 18 cm a 10 cm. Určete jeho povrch.

9) Určete objem a povrch kolmého čtyřbokého jehlany *ABCDV* s obdélníkovou podstavou, znáte-li výšku v jehlanu a odchylky α, β rovin stěn *ABV* a *BCV* od roviny podstavy.

10) Podstavou rovnoběžnostěnu $ABCDA'B'C'D'$ je kosočtverec *ABCD*, $|AB| = a, |\sphericalangle BAD| = 60°$, boční hrany mají délky a a odchylka bočních hran od roviny podstavy je 60°. Určete jeho V.

11) Je dán kosý trojboký hranol, jehož boční hrany mají délku 24 cm. Řezem rovinou kolmou k bočním hranám hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 12 a 35 cm. Vypočtěte obsah jeho pláště.

12) Cheopsova pyramida je 145 m vysoká, její podstavou je čtverec o straně délky 232,7 m. **a)** Určete poměr obsahu podstavy pyramidy a kruhu, jehož poloměr se rovná výšce pyramidy (tento poměr je u každé pyramidy stejný). **b)** Kolik tun kamene je v pyramidě ($\rho = 2,7$ g/cm^3)? **c)** Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm, vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem ČR, měří-li hranice 2303 km?

13) Částečně naplněný barel tvaru rotačního válce výšky v = 1 m plave na vodě tak, že jeho osa je rovnoběžná s vodní hladinou. Délka tětivy, kterou na podstavě barelu vyznačuje vodní hladina, je 40 cm. Výška kruhové úseče podstavy vyčnívající nad hladinu je 10 cm. Vypočtěte objem barelu.

14) Určete objem a povrch komolého kužele, jehož podstavy jsou kruh opsaný a kruh vepsaný protilehlým stěnám krychle s hranou délky a.

15) Nakloníme-li o 30° nádobou tvaru polokoule, která byla zcela naplněna vodou, vyteče z ní 3,3 litru vody. Kolik litrů vody v ní zůstane?

16) Kulová plocha je rozdělena dvěma rovnoběžnými rovinami na tři díly o stejném obsahu. Jakou částí objemu koule je objem příslušné kulové vrstvy?

7 ANALYTICKÁ GEOMETRIE

7.1 Bod a vektor

1) **Zapište podmínky pro souřadnice všech bodů, které leží**: **a)** v I. kvadrantu, **b)** ve IV. kvadrantu, **c)** na ose I. a III. kvadrantu, **d)** na přímce rovnoběžné s osou *x* a procházející bodem $M[3;2]$.

2) **Jsou dány body** $A[1;1]$, $B[3;1]$, $C[3;2]$ **a** $D[1;2]$**. Zapište podmínky pro souřadnice všech bodů: a)** obdélníku *ABCD*, **b)** obdélníku *ABCD* s výjimkou strany *AB*, **c)** úsečky *BC* bez krajního bodu *B*, **d)** rovinného pásu s hraničními přímkami *AD* a *BC*.

3) **V kartézské soustavě souřadnic je dána krychle *ABCDEFGH*, pro kterou platí:** $A[0;3;0]$, $B[3;3;0]$, $C[3;0;0]$**. a)** Zapište souřadnice zbývajících vrcholů krychle. **b)** Určete souřadnice vrcholů krychle v rovinné souměrnosti s rovinou souměrnosti *ABC*. **c)** Určete souřadnice vrcholů krychle ve středové souměrnosti se středem $P[0;0;0]$. **d)** Určete souřadnice vrcholů krychle v osové souměrnosti s osou *x*.

4) **Vypočítejte vzdálenost bodů *A*, *B*, je-li dáno: a)** $A[1;-2],B[4;2]$, **b)** $A[5;-8],B[-7;-3]$, **c)** $M[-3;2;5],N[6;-1;5]$, **d)** $M[5;4;-9],N[-2;3;-4]$

5) **N**a ose *x* určete bod tak, aby jeho vzdálenost od bodu $A[-2;8]$ byla 10 *j*.

6) **Vypočítejte délky stran trojúhelníku *ABC* a rozhodněte, zda je pravoúhlý, je-li dáno:**
a) $A[-1;1],B[3;1],C[-1;4]$ **b)** $A[2;3],B[5;4],C[5;-1]$

7) **Určete číslo *s* tak, aby vzdálenost** $|AB|$ **byla nejmenší:**
a) $A[5;3;-2],B[-3;s-1;4]$ **b)** $A[4;s+5;-7],B[3;2;-6]$

8) Ve středové souměrnosti je obrazem bodu $A[-\frac{1}{2};\frac{3}{5};-1\frac{7}{10}]$ bod $A'[1,3;-1,6;-1,1]$. Určete střed souměrnosti.

9) **Určete bod *D* tak, aby *ABCD* byl rovnoběžník:**
a) $A[2;-3;1],B[4;0;-3],C[-2;3;-4]$ **b)** $A[1;-2],B[5;1],C[-3;4]$

10) **Vypočítejte délku těžnice** t_c **a souřadnice těžiště trojúhelníku *ABC* :**
a) $A[-5;-3],B[4;-1],C[-3;4]$ **b)** $A[-7;-2;4],B[3;0;-2],C[1;4;8]$

11) Určete čísla *r*, *s* tak, aby platilo $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$: $A[5;-2],B[1;r],\vec{u}(s,-3)$

12) **Je dán kosodélník *ABCD*. Vyjádřete pomocí vektorů** $\vec{c}=\overrightarrow{AC},\vec{d}=\overrightarrow{BD}$ **: a)** součet vektorů $\vec{a},\vec{b}$, **b)** součet vektorů $\vec{a},-\vec{b}$, **c)** součet vektorů $-\vec{a},-\vec{b}$, **d)** rozdíl vektorů $\vec{b},\vec{a}$, **e)** rozdíl vektorů $-\vec{a},\vec{b}$, **f)** rozdíl vektorů $-\vec{a},-\vec{b}$, **je-li** $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ **.**

13) **Určete lineární kombinaci** $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$ **vektorů** $\vec{u}(1;-2;3),\vec{v}(6;0;-4),\vec{w}(-3;2;1)$**, je-li:**
a) $a=-1;b=2;c=0$ **b)** $a=2;b=3;c=-4$

14) Je dán pravidelný šestiúhelník *ABCDEF* se středem *S*. Vyjádřete pomocí vektorů $\vec{a}=B-A$, $\vec{b}=C-B$ vektory $\vec{c}=C-F,\vec{d}=A-S,\vec{e}=D-C,\vec{f}=B-E$.

15) **Zjistěte, zda jsou vektory** $\vec{u},\vec{v}$ **rovnoběžné:**
a) $\vec{u}(1;3),\vec{v}(3;1)$ **b)** $\vec{u}(2;-3),\vec{v}(-4;6)$ **c)** $\vec{u}(3;-4;6),\vec{v}(0;0;0)$ **d)** $\vec{u}(3;-4;6),\vec{v}(-1;\frac{2}{3};-2)$

16) Určete neznámou souřadnici vektoru $\vec{u}$ tak, aby $\vec{u}$ byl lineární kombinací vektorů $\vec{v},\vec{w}$:

a) $\vec{u}(3;u_2;5),\vec{v}(4;-1;0),\vec{w}(3;2;1)$ **b)** $\vec{u}(u_1;8;2),\vec{v}(1;2;1),\vec{w}(2;12;5)$

17) Zjistěte, zda dané tři body leží na jediné přímce:

a) $A[-3;2],B[-7;-4],C[-1;5]$ **b)** $A[7;-1;3],B[5;2;2],C[1;8;1]$

18) Vypočítejte velikost úhlu vektorů: a) $\vec{u}(-4;-2),\vec{v}(-1;-3)$ **b)** $\vec{u}(-2;0),\vec{v}(-2;-2\sqrt{3})$

19) Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, délka jeho podstavné hrany je 6, výška jehlanu $3\sqrt{2}$. Zvolením vhodné soustavy souřadnic v E_3: **a)** dokažte, že přímky *AV* a *CV* jsou na sebe kolmé, **b)** určete velikost úhlu vektorů $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{CB}$.

20) Určete vektorový součin vektorů $\vec{u}=B-A,\vec{v}=C-A$, je-li:

a) $A[-3;4;6],B[-5;3;7],C[0;8;4]$ **b)** $A[-2;-1;5],B[3;2;-6],C[1;1;-1]$

21) Vypočtěte obsah trojúhelníku *ABC* využitím vektorového součinu:

a) $A[5;1;4],B[-1;-2;6],C[2;3;-2]$ **b)** $A[3;-1;2],B[1;3;2],C[5;1;5]$

22) Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*: $A[1;2;1],B[7;3;0],D[-1;5;2],E[1;0;6]$

23) Vypočtěte objem čtyřstěnu *ABCD*: $A[5;2;-3],B[-3;4;-1],C[-1;-1;3],D[-1;1;-2]$.

7.2 Lineární útvary

1) Napište rovnici tečny kružnice v bodu dotyku $T[6;2]$, má-li její střed souřadnice $[3;-4]$.

2) Určete reálné číslo *p* tak, aby bod *C* ležel na přímce *AB*, je-li: $A[-4;-5],B[-1;0],C[p;p-5]$

3) Jsou dány přímky *p*: $\begin{matrix} x=1+3t \\ y=2-4t \end{matrix}$, $t\in\mathbb{R}$ a *q*: $\begin{matrix} x=-3+4r \\ y=2+3r \end{matrix}$, $r\in\mathbb{R}$. Rozhodněte o jejich vzájemné poloze. Pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík a odchylku; pokud jsou rovnoběžné, vypočtěte jejich vzdálenost.

4) Jsou dány body $A[-3;-2],B[3;-4],C[5;2]$. a) Dokažte, že dané body tvoří trojúhelník. **b)** Napište rovnici úsečky *AB* a ověřte, zda na ní leží bod $D[-6;-1]$. **c)** Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku. **d)** Napište obecnou rovnici výšky na stranu *c*.

5) Rozhodněte o vzájemné poloze rovin $\begin{matrix} \rho: 2x-5y+4z-10=0 \\ \sigma: x-y-z-2=0 \end{matrix}$. Jsou-li různoběžné, určete parametricky jejich průsečnici a vypočítejte jejich odchylku; jsou-li rovnoběžné, vypočtěte jejich vzdálenost.

6) Vypočítejte vzdálenost bodu $M[3;-1;4]$ od přímky $p=AB:$ $A[0;2;1],B[1;3;0]$.

7) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[2;-1;0],B[-1;2;-3],C[-2;-3;1]$.

8) Ukažte, že přímky *p*, *q* jsou rovnoběžné, a pak vypočítejte jejich vzdálenost $p: x + 2y - 10 = 0$, $q: x = 3 - 2t, y = 2 + t$, $t\in\mathbb{R}$.

9) Určete bod *M´* souměrný k bodu *M* podle přímky *AB* a určete vzdálenost bodu *M* od přímky *AB*: *M*[5; –6; 6]; *A*[–2; –5; 4]; *B*[4; 1; 4].

10) Vypočtěte vzdálenost bodu *A* od roviny ρ, je-li: $A[3;5;-6],\rho: 2x-2y+z-8=0$.

11) Je dána přímka $p: x-y+z+1=0; x+y+3z-3=0$ a rovina $\rho: x-y+z=0$.

a) Vypočtěte odchylku přímky *p* a roviny ρ. **b)** Určete průnik přímky *p* a roviny ρ.

12) Je dán čtyřstěn *ABCD*: $A[0;1;3], B[1;0;2], C[-2;-1;5], D[0;-2;-6]$ **. Vypočítejte:**

a) odchylku přímky *AD* a roviny *ABC*

b) odchylku rovin *ABC* a *ABD*

c) odchylku přímky *DC* a roviny *ABD*

d) odchylku rovin *ABC* a *BCD*

e) obsah stěny *ABC*

f) objem čtyřstěnu *ABCD*

13) Určete čísla *a*, *b* tak, aby bod *C* ležel na přímce *AB*: $A[1;2;3], B[3;-2;1], C[a;b;-3]$.

14) Je dán bod $A[-1;2;1]$ a přímka $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z$. Napište rovnici roviny určené bodem *A* a přímkou *p*.

15) Napište rovnici roviny, která prochází body $A[2;2;3], B[1;0;2]$ a je kolmá k rovině $x-8y+z-10=0$.

16) Určete vzájemnou polohu rovin $\alpha: 3x-y-7z+11=0; \beta: 2x-8y-z+12=0$.

17) Určete souřadnice pravoúhlého průmětu bodu $M[-7;8;12]$ na přímku $p: x+2y+z-33=0$, $2x+y-z+12=0$.

18) Je dána přímka $p=\{[1-t;1+t;3+2t], t\in\mathbb{R}\}$, přímka $q=\{[1-2s;s;3+3s], s\in\mathbb{R}\}$ a rovina $x+2y-z+2=0$. Určete parametrickou rovnici příčky mimoběžek *p*, *q*, která leží v dané rovině.

19) Dokažte, že body $K[-1;2;-3], L[-2;3;-1]$ leží v opačných poloprostorech s hraniční rovinou τ, která má rovnici $x+2y-3z-8=0$. Nalezněte průsečík roviny τ s úsečkou *KL*.

20) Jsou dány body *A*, *B* a rovina ρ. Napište rovnici roviny, která prochází danými body a je kolmá na ρ: $A[1;-1;3], B[-2;-13;2], \rho: 2x-3y+8z-6=0$.

21) Určete, zda mají dané tři roviny jediný společný bod a určete jeho souřadnice, je-li: $\alpha: x-2y-z+1=0, \beta: x+y+z-7=0; \gamma: 2x+y-z-2=0$.

22) Jsou dány body $A[5;4], B[-2;-2], C[-2;-3], D[-3;-3]$. Rozhodněte, které z těchto bodů leží v polorovině určené přímkou o rovnici $5x-7y-6=0$ a bodem $M[3;1]$.

23) Zjistěte, zda bod *M* je bodem konvexního úhlu *AVB*: $A[3;-2], V[-2;1], B[6;5], M[-1;2]$.

24) Zjistěte, zda body $M[-4;1], N[-3;-2]$ jsou vnitřními body trojúhelníku *ABC*, je-li: $A[-7;-3]$, $B[5;1]$, $C[-2;4]$.

25) Odvoďte pomocí analytické geometrie Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku.

26) Těleso se pohybuje rovnoměrně přímočaře. V čase $t=0$ **je těleso v bodě** $A[1;2]$, **v čase** $t=1$ **je v bodě** $B[3;5]$**. a)** Určete parametrické vyjádření trajektorie tělesa. **b)** Vypočítejte souřadnice bodu *C*, ve kterém bude těleso za 15 sekund. **c)** Určete čas, v němž bude poloha tělesa dána souřadnicemi $[7;11]$.

27) Určete průsečík výšek trojúhelníku *ABC*, je-li: $A[-3;1], B[4;-2], C[1;5]$.

28) Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[-3;0]$ a svírá s přímkou $x\sqrt{3}+3y+5=0$ odchylku 60°.

29) Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem *M*[1; –5; 3] a svírá s osami souřadnic úhly $\alpha=60°; \beta=45°; \gamma=120°$.

7.3 Kvadratické útvary

1) Napište středovou rovnici kružnice, která prochází bodem $A[4;1]$ a dotýká se osy *y* v $B[0;5]$.

2) Identifikujte kuželosečku $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$ a určete její hlavní prvky (střed, velikosti poloos, asymptoty, vrcholy, apod.). Křivku načrtněte.

3) Určete vzájemnou polohu kružnice k a přímky p: $p: 2x-y=0; k: x^2+y^2-3x+2y-4=0$.

4) Identifikujte kuželosečku $25x^2-16y^2-150x+224y-959=0$ a určete její hlavní prvky (střed, velikosti poloos, asymptoty, vrcholy, apod.). Křivku načrtněte.

5) Napište rovnici tečny paraboly $y^2-x-4y+4=0$ procházející počátkem soustavy souřadné.

6) Charakterizujte křivku danou rovnicí $x^2+y^2-4x+12y+27=0$ a napište rovnice tečen, které jsou rovnoběžné s přímkou *p* : 2*x* – 3*y* + 5 = 0 .

7) Určete střed a poloměr kulové plochy, která má rovnici $x^2+y^2+z^2-4x+7y-3z=0$. Určete průsečíky souřadnicových os *x*, *y*, *z* s touto kulovou plochou.

8) Určete průsečíky sféry κ s osou *x* soustavy souřadné: $\kappa: x^2+y^2+z^2-2x-10y+8z-8=0$.

9) Určete tečné roviny kulové plochy $(x-4)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=38$ v bodě $A[-1;1;3]$.

10) Určete rovnici sféry, která prochází body $A[2;-1;0], B[5;0;-4], C[0;-3;-2], D[3;6;-6]$.

11) Napište středovou rovnici hyperboly, jejíž asymptoty mají rovnice $2x+y-5=0$ a $2x-y-3=0$ a na níž leží bod $A\left[2+2\sqrt{2};5\right]$.

12) Určete odchylku tečen ke kružnici $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ vedených z bodu $R[-5;-2]$.

13) Do elipsy $x^2+9y^2=9$ je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle hlavní osy. Určete jeho souřadnice.

14) Napište rovnici kružnice opsané Δ *ABC*: $A[-1;3], B[0;2], C[1;-1]$.

15) Napište rovnici kružnice souměrně sdružené s kružnicí $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ vzhledem k přímce o rovnici $x-y-3=0$.

16) Určete vzájemnou polohu přímky $x-y+m=0$ a hyperboly $4x^2-25y^2=100$ (*m* je parametr).

17) Určete rovnici kružnice vepsané trojúhelníku, jehož strany leží na přímkách o rovnicích $3x-4y-5=0$, $8x+6y-19=0$, $5x+12y-27=0$.

18) Do elipsy je vepsán čtverec. Vyjádřete jeho obsah pomocí *a*, *b*.

19) Průměr parabolického automobilového reflektoru je 24 cm, hloubka reflektoru je 12 cm. Určete rovnici parabolického řezu a vypočtěte polohu vlákna žárovky, je-li reflektor zapnut na dálková světla (vlákno je v tomto případě v ohnisku).

20) Určete *S* a *r* kružnice, v níž rovina $2x+y-z+6=0$ protíná kulovou plochu $(x-3)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=28$.

21) Určete, pro které hodnoty *d* je průnikem sféry $x^2+y^2+z^2-2x-10y+8z+28=0$ a roviny $2x-y+3z+d=0$ nějaká kružnice.

22) Určete společné tečny kružnic: $(x-3)^2+(y+1)^2=36; (x-11)^2+(y-3)^2=4$.

8 KOMBINATORIKA, PRAVDĚPODOBNOST, STATISTIKA

8.1 Kombinatorika

1) Kolik leteckých linek lze vytvořit mezi 15 evropskými městy, pokud může mít každá linka nejvýše jedno mezipřistání?

2) Ve třídě je 30 studentů a 15 lavic. Kolik dvoučlenných služeb lze z těchto studentů vytvořit tak, aby službu neměli ti, co sedí spolu v lavici? Kolikrát může mít každý student službu?

3) **V osudí je 8 bílých, 10 modrých a 7 červených koulí (vzájemně rozlišitelných). Kolika způsoby lze z osudí vytáhnout: a)** dvě bílé koule, **b)** dvě modré koule, **c)** čtyři modré koule, **d)** tři červené koule, **e)** dvě bílé a dvě modré koule, **f)** čtyři modré a tři červené koule?

4) Určete kolik různých slov (bez ohledu na význam) lze sestavit z písmen slova MATEMATIKA.

5) Určete počet všech přirozených čísel, která jsou: **a)** dvojciferná, **b)** trojciferná, **c)** čtyřciferná a mají vesměs různé číslice.

6) Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den (6 hodin) pro jednu třídu, v níž se vyučuje 12 předmětů a každý den se vyučuje každý předmět nejvýše jednou.

7) Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit 6 osob, jestliže **a)** dvě chtějí sedět vedle sebe, **b)** dvě chtějí sedět vedle sebe a třetí chce sedět na kraji.

8) Je dán čtverec *ABCD* a na jeho každé straně *n* vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech a na různých stranách čtverce *ABCD*.

9) V rovině je dáno 20 bodů, z nichž žádné tři neleží na téže přímce a žádné čtyři na kružnici. Určete, kolik je těmito body určeno přímek a kolik kružnic.

10) V rovině je dáno 20 bodů, z nichž 5 leží na téže přímce. Kolik je těmito body určeno přímek a kolik trojúhelníků?

11) Petr má 7 knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má 10 knih, o které se zajímá Petr. Kolika způsoby si Petr může vyměnit své dvě knihy za dvě Ivaniny knihy?

12) Kolika různými způsoby lze uložit 20 stejných autíček do tří krabic?

13) Víte-li, že $\binom{10}{3}=x$, vyjádřete $\binom{10}{7};\binom{10}{2};\binom{10}{4};\binom{11}{3};\binom{11}{4}$ pomocí *x*.

14) **Řešte rovnici v oboru přirozených čísel**:

a) $\binom{6}{5}\binom{x+1}{x-1}-\binom{6}{4}\cdot\binom{x+2}{x+1}=\binom{4}{2}$ **b)** $\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-2}{n-4}=9$

15) **Řešte nerovnici:**

a) $n^2+1\geq\binom{n+2}{2}$ **b)** $(n+2)!\cdot\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{9}{(n+2)!}\right]\leq 0$ **c)** $\binom{n}{n-2}\binom{n}{2}+28<11\binom{n}{2}$

16) Užitím vlastností kombinačních čísel určete součet: $\binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2}+\binom{8}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}+\binom{11}{6}$.

17) Dokažte, že platí: $n\left[n!+(n-1)!\right]+n^2(n-1)!+(n+1)!=(3n+2)n!$ pro každé přirozené číslo *n*.

18) Dokažte, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí: **a)** $n!+(n+3)!>(n+1)!+(n+2)!$

19) Je dán výrazu $\left(2x^2-3x^{-1}\right)^6, x\neq 0$. Který jeho člen binomického rozvoje neobsahuje *x*?

20) Určete, pro která reálná čísla *x* je v binomickém rozvoji $\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ čtvrtý člen roven 200.

21) Pro které $x \in \mathbb{R}$ platí, že 4. člen binomického rozvoje $(1+x)^6$ je čtyřikrát větší než třetí člen?

8.2 Pravděpodobnost a statistika

1) Roztržitá sekretářka náhodně vloží 3 dopisy do 3 obálek. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden adresát dostane správný dopis?

2) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne: **a)** právě jedna šestka, **b)** alespoň jedna šestka, **c)** nejvýše jedna šestka, **d)** žádná šestka?

3) V sáčku je 10 červených, 4 modré a 6 bílých kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že při tažení 3 kuliček najednou: **a)** bude každá kulička jiné barvy, **b)** budou všechny kuličky téže barvy?

4) V obálce máme lístky očíslované přirozenými čísly od 1 do 90. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném tažení jednoho lístku na něm bude: a) jednociferné číslo, b) dvojciferné číslo, c) číslo větší než 40?

5) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami padne součet 12?

6) Fotbalista promění penaltu s pravděpodobností 0,9. Jaká je pravděpodobnost, že z pěti penalt promění: **a)** všech pět, **b)** právě tři, **c)** alespoň 4?

7) Z množiny $\{1, 2, ..., 100\}$ vybereme náhodně 3 čísla. Jaká je pravděpodobnost, že jedno z nich bude aritmetickým průměrem ostatních dvou?

8) 35 % žáků jezdí do školy autobusem, 25 % tramvají, 15 % používá oba dopravní prostředky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný žák: **a)** používá alespoň jeden z obou prostředků, **b)** nejezdí ani jedním, **c)** jezdí autobusem, ale ne tramvají, **d)** jezdí buď jenom autobusem, nebo jen tramvají?

9) V ruletě je 37 možných výsledků (0 až 36). Hráč vsadil v téže hře na „lichá“, na „první tucet“ (tj. na čísla 1 až 12) a na „poslední číslici 2“ (tj. čísla 2, 12, 22, 32). Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje alespoň jednu sázku?

10) Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině 7 studentů mají alespoň dva narozeniny ve stejný den?

11) Ve skupině 20 osob byl zjišťován jejich věk a byly zjištěny tyto údaje: 18; 17; 21; 28; 30; 21; 26; 25; 21; 19; 20; 24; 29; 26; 25; 22; 21; 29; 18; 27 let. Určete modus a medián statistického souboru; dále určete aritmetický průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku.

12) V jisté dílně, v níž se vyrábějí stejné výrobky, byly naměřeny šesti dělníkům tyto časy potřebné ke zhotovení jednoho výrobku: 3, 4, 5, 6, 10, 12 minut. Určete dobu, které je v průměru třeba ke zhotovení jednoho výroku.

13) Aritmetický průměr sedmi různých přirozených čísel je 9, jejich medián je 10. Jaké největší hodnoty může nabýt největší z daných čísel?

14) Házíme mincí, až poprvé padne líc; znak *x* udává, v kolikátém hodu se tak stalo. Opakování tohoto pokusu dalo následující rozdělení četností (viz tabulka). **a)** Vypočtěte aritmetický průměr, modus a medián. **b)** Porovnejte relativní četnosti s příslušnými pravděpodobnostmi.

čekání na líc	1	2	3	4	5	6	7	8
četnost	53	21	13	8	3	1	0	1

15) Jistý autor opakoval 4 096krát hod 12 kostkami; v každém hodu zaznamenal počet šestek. Rozdělení četností tohoto znaku udává tabulka. Určete aritmetický průměr, modus, medián, směrodatnou odchylku a mezikvartilovou odchylku.

počet šestek	0	1	2	3	4	5	6	7 a víc
četnost	447	1145	1181	796	380	115	24	8

9 POSLOUPNOSTI A ŘADY

9.1 Vlastnosti posloupností, aritmetická a geometrická posloupnost

1) Je dána posloupnost $\left\{\dfrac{5n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Určete, zda je klesající nebo rostoucí. Rozhodněte, zda je daná posloupnost omezená a určete její limitu. Určete tuto posloupnost rekurentně.

2) Posloupnost je dána rekurentně: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \dfrac{a_n (n+1)^2}{n(n+2)}$. Určete ji vzorcem pro *n*-tý člen.

3) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně: $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2$. a) Určete ji vzorcem pro *n*-tý člen. **b)** Rozhodněte, od kterého členu platí pro tuto posloupnost nerovnost $|a_n| < 0{,}001$.

4) Pro která $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\left\{\dfrac{x+1}{n^2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesající, resp. neklesající?

5) Určete a_n v geometrické posloupnosti, jestliže platí: $a_1 + a_4 = 195, a_2 + a_3 = 60$.

6) Najděte všechny aritmetické posloupnosti, u nichž součet prvních tří členů je 3 a součet druhých mocnin těchto členů je 35.

7) Určete vzorcem pro n-tý člen aritmetickou posloupnost, pro kterou platí: $a_2 + a_5 = 8; a_3 + a_7 = 14$.

8) Zjednodušte výraz: $V = \dfrac{3+7+11+\ldots+(4n-1)}{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+3n}$, kde $n \in \mathbb{N}$.

9) Mezi čísla 4 a 37 vložte několik čísel tak, aby spolu s danými čísly tvořila po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti a aby součet všech těchto čísel byl 246. Určete počet vložených čísel a *d*.

10) Pro která *x* jsou $\log 2^x, \log(2^x+1), \log(2^x+3)$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti?

11) Přičteme-li totéž číslo k číslům 2, 7, 17, získáme první tři členy geometrické posloupnosti. Vypočtěte toto číslo a příslušnou posloupnost určete vzorcem pro *n*-tý člen.

12) Čtyři čísla tvoří aritmetickou posloupnost. Jejich součet je 20 a součet jejich převrácených hodnot je $\frac{25}{24}$. Určete tato čísla.

13) Jestliže $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{a+b}$ jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, potom i čísla a^2, b^2, c^2 jsou tři po sobě jdoucí členy jiné aritmetické posloupnosti. Dokažte.

14) Dokažte matematickou indukcí platnost vzorců pro *n*-tý člen a částečný součet pro aritmetickou a geometrickou posloupnost.

9.2 Limita posloupnosti a nekonečná řada

1) Vypočtěte limitu posloupnosti:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-8^n}{2^n+8^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2n-1}$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\pi$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n-2}{3n-6}$

2) Určete součet řady, pokud existuje:

a) $1+\sin^2 x+\sin^4 x+\dots$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-8^n+12^n}{24^n}$ **d)** $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\dots$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

3) Vyjádřete dané číslo zlomkem v základním tvaru: a) $0{,}0\overline{25}$, **b)** $0{,}5\overline{38}$, **c)** $3{,}5\overline{135}$

4) Řešte rovnice:

a) $\log x+\log\sqrt[2]{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+\dots=2$ **b)** $1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}+\dots=\frac{2x-4}{x+6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{x}\right)^{n-1}=\frac{8}{x+10}$ **d)** $1+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin^2 x+\frac{1}{8}\sin^3 x+\dots=\frac{8\sin x+2}{7\sin x+1}$

e) $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[16]{x^3}\cdot\dots=8$ **f)** $2^x+4^x+8^x+16^x+\dots=1$

9.3 Užití posloupností a řad

1) Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je ji třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašek. Tašky jsou srovnány tak, že v další řadě bude o jednu tašku více. Kolik tašek je třeba k pokrytí části střechy?

2) Kvádr, jehož číselné hodnoty délek hran v metrech jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, má povrch 78 m^2. Součet délek hran procházejících jedním jeho vrcholem je 13 m. Vypočtěte objem kvádru.

3) Určete velikost nejmenšího vnitřního úhlu pravoúhlého trojúhelníku, víte-li, že číselné hodnoty délek jeho stran v cm tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

4) Zjistěte, zda existuje konvexní mnohoúhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost 100° a každý následující úhel je o 10° větší než předcházející.

5) „Nekonečná“ spirála se skládá z polokružnic, poloměr první polokružnice je 6 cm, poloměr každé další polokružnice je třikrát menší než poloměr polokružnice předcházející. Vypočítejte délku spirály.

6) Do trojúhelníku o straně délky a je vepsán trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran původního trojúhelníku; do tohoto trojúhelníku je vepsán další trojúhelník stejným způsobem atd. **a)** Vypočtěte součet obvodů všech takto vzniklých trojúhelníků. **b)** Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

7) Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s délkou odvěsny *s* je vepsán trojúhelník tak, že jeho vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníku; do takto vzniklého trojúhelníku je vepsán další trojúhelník stejným způsobem atd. **a)** Vypočtěte součet obvodů všech takto vzniklých trojúhelníků. **b)** Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

8) Do čtverce o straně délky 1 *j* je vepsán čtverec tak, že jeho vrcholy jsou středy stran původního čtverce; do tohoto čtverce je vepsán další čtverce stejným způsobem atd. **a)** Vypočtěte součet obvodů všech takto vzniklých čtverců. **b)** Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců.

9) Do krychle o hraně *a* je vepsána koule, do této koule je vepsána krychle, do této krychle je opět vepsána koule atd. **a)** Vypočtěte součet povrchů všech takto vzniklých krychlí. **b)** Vypočtěte součet povrchů všech takto vzniklých koulí.

10) Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. **a)** Vypočtěte roční přírůstek obyvatel. **b)** Vypočtěte, jaký byl počet obyvatel za 25 let při 5% ročním přírůstku.

11) Vkladatel uložil na počátku roku na termínovaný vklad na 2 roky částku 26 000 Kč. Roční úroková míra je 3,5 %. Jak vysokou částku bude mít na konci druhého roku, jestliže si v průběhu celé doby nevybíral úroky a je-li úrokovací období polovina roku? Daň z úroků je 15 %.

12) Při průchodu skleněnou deskou ztrácí světlo 5 % své intenzity. Kolik desek bude třeba na sebe navrstvit, aby se světlo ztlumilo alespoň na polovinu původní intenzity?

13) Občan si založil na konci roku 1993 osobní konto s roční úrokovou mírou 6 % a se čtvrtletním úrokovacím obdobím. Na konto hned 5 000 Kč a stejnou částku pak pravidelně ukládal na konci každého čtvrtletí roku 1994; přitom z konta nic nevybíral. Jak vysoká částka byla na jeho kontě na konci roku 1994? Daň z úroků činí 15 %.

14) O kolik procent by bylo potřeba ročně zvyšovat výrobu dílny, aby se v průběhu 5 let zvýšila o 70 %?

15) Banka poskytla podnikateli počátkem roku 1995 úvěr ve výši 1 000 000 Kč, a to na dobu tří let s úrokovou mírou 14 % p. a. a s ročním úročením. Podnikatel splatí půjčku ve třech stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru. Kolik korun bude činit jedna splátka?

16) Do rovnostranného trojúhelníku *ABC* se stranou délky *a* je vepsán čtverec *KLMN* tak, že strana *KL* je částí úsečky *AB*. Úsečka *KL* je pak stranou dalšího rovnostranného trojúhelníku, kterému je opět stejným způsobem vepsán čtverec atd. Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých čtverců.

17) Množství dřeva v určité lesní oblasti se odhaduje na $1,5\cdot 10^6\,\mathrm{m}^3$ a roční přírůstek je 2 %. Jaký bude přibližně stav po 10 letech, těží-li se ročně $2\cdot 10^4\,\mathrm{m}^3$?

10 INFINITEZIMÁLNÍ POČET

10.1 Diferenciální počet

1) Vypočtěte limitu funkce:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x}{7x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ **g)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

2) Derivujte funkce:

a) $y=\sin^2\left(3x^3+2\right)$ **b)** $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **c)** $x^2y+y^2+x=1$ **d)** $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t\end{cases}$**;** $\dfrac{dy}{dx}=?$

3) Napište rovnici tečny a normály funkce $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ v bodě $T[2;?]$.

4) Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy dané funkce:

a) $y=2x^3-3x^2$ **b)** $y=\sin 2x; x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y=\ln^2 x$ **d)** $y=\sin^3 x+\cos^3 x; x\in(0;\pi)$

5) Určete lokální extrémy funkce $y=3x^4+8x^3-18x^2+5$.

6) Ve kterém bodě má funkce $y=2x^2+3x-1$ **tečnu a)** se směrovým úhlem 45°, **b)** rovnoběžnou s přímkou $5x-y+3=0$, **c)** kolmou k přímce $x-3y+2=0$.

7) Určete asymptoty funkce: a) $y=\dfrac{2x^2}{2x-1}$ **b)** $y=\dfrac{2x^2+3}{x}$

8) Z lepenky tvaru čtverce o straně 50 cm se mají v rozích vyříznout shodné čtverce a ze zbylé části se ohnutím získá krabička tvaru kvádru. Jak velké musejí být strany vyříznutých čtverců, aby objem krabičky byl maximální?

9) Dvě auta se pohybují po přímých navzájem kolmých drahách stálou rychlostí $v=20$ m/s směrem ke křižovatce. V čase $t_0=0$ s je jedno auto vzdáleno od křižovatky 100 m, druhé 200 m. **a)** Určete čas, ve kterém bude vzdálenost aut nejmenší, **b)** tuto vzdálenost vypočtěte.

10) Určete intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body dané funkce:

a) $y=3x^2-2x+1$ **b)** $y=x^4-x^3$ **c)** $y=-x^3+6x^2+32$ **d)** $y=\dfrac{-2x}{x^2+1}$ **e)** $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

10.2 Integrální počet

1) Vypočtěte:

a) $\int\left(x\cdot\sqrt[3]{x}+\dfrac{4}{x^3}\right)dx$ **b)** $\int\dfrac{\sin x}{1+\cos x}dx$ **c)** $\int x^2e^x\,dx$ **d)** $\int\dfrac{\ln^2 x}{x}dx$

e) $\int e^x\sin x\,dx$ **f)** $\int\dfrac{(x+1)^3}{x^2}dx$ **g)** $\int\cos^2 x\,dx$ **h)** $\int x\cdot e^{x^2}dx$

2) Vypočtěte obsah plochy omezené funkcemi $f: y=x^2; g: y=2x$.

3) Určete obsah obrazce omezeného křivkami $y=5x-x^2; y=x+4; y=0; x=5$.

4) Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami $y=x^2; y=1-x^2$. Načrtněte obrázek, a pak vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací této plochy kolem osy *x*.

1.1.1) **a)** $3<3,1\overline{9}=3,2<3,\overline{2}$ **b)** $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{3}{4}$ **c)** $1,3<1,4<\sqrt{2}<\sqrt{3}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

1.1.2) **a)** $\sqrt{5+4}-\sqrt{12+4}=-1$, **b)** $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{\frac{9}{4}}}+\sqrt{\frac{1}{\frac{9}{16}}}}=\sqrt{2}$, **c)** $\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

1.1.3) **a)** 0 **b)** $-\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{25}{12}$ **d)** $\frac{6}{5}$ **e)** $\frac{11}{16}$ **f)** $-\frac{1}{6}$ **g)** $\frac{25}{6}$ **h)** $-\frac{5}{8}$

1.1.4) **a)** $0,\overline{3}$ **b)** $0,8\overline{3}$ **c)** $0,\overline{142857}$ **d)** $0,375$ **e)** $0,\overline{5}$ **f)** $0,1\overline{3}$ **g)** $0,\overline{09}$

1.1.5) **a)** $\frac{3}{11}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{781}{333}$ **d)** $\frac{1234}{9999}$ **e)** $\frac{13}{18}$ **f)** $\frac{3}{22}$ **g)** $\frac{8}{11}$

1.1.6) **a)** $100^\circ 5' 10''$ **b)** $8^\circ 27' 55''$ **c)** $40^\circ 20'$ **d)** $162^\circ 16' 30''$

1.1.7) **a)** 1 **b)** 3

1.1.8) 8000 Kč

1.1.9) 4 h

1.1.10) 4 h

1.1.11) 40,5

1.1.12) cca 2,8 kg

1.1.13) přibližně 9,1 %

1.1.14) přibližně 13 %

1.1.15) 13,33 %

1.1.16) 6; 460; 238; 50

1.2.1) **a)** ano, 1, **b)** ano, 0, **c)** ano, 1, **d)** ano, 0, **e)** ne, **f)** ano, 1, **g)** ano, 1, **h)** ano, 0, **i)** ano, 0, **j)** ano, 1, **k)** ne

1.2.2) **a)** obdélník, čtverec, **b)** *n* končí číslicí 5, **c)** pravoúhlý trojúhelník s přeponou *c*, **d)** žádné *a*, *b*, **e)** pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\langle -3;3\rangle$

1.2.3) **a)** 1; Rovnice $x+1=5$ nemá kořen nebo má alespoň dva kořeny. **b)** 0; Rovnice $x+1=5$ nemá nekonečně mnoho kořenů. **c)** 0; Rovnice $x+1=5$ má jeden nebo dva nebo tři kořeny. **d)** 1; Alespoň jedno z čísel 1, 4, 9 není druhou mocninou přirozeného čísla. **e)** 1; Alespoň jedno z čísel 1, 4, 9 není druhou mocninou přirozeného čísla. **f)** 1; Žádné z čísel 1, 4, 9 není třetí mocninou přirozeného čísla.

1.2.4)

A	B	$\neg(\neg A\vee\neg B)\vee B$	$A\Rightarrow B\wedge\neg A$	$A\wedge B\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee\neg B)$	$A\wedge B\wedge\neg B$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

1.2.5) **a)** $A\wedge B$, **b)** 1, **c)** $A\Leftrightarrow B$, **d)** 0

1.2.6) **a)** $(\exists n\in\mathbb{N})\sqrt{n}\in\mathbb{N}$, **b)** $(\forall n\in\mathbb{N})1|n\vee n|n$, **c)** $(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})x+y=0$

1.2.7) **a)** Nejvýše čtyři žáci chyběli. **b)** Alespoň osm zájemců se neozvalo. **c)** Nejvýše dvě nebo alespoň čtyři baterie byly vadné.

1.2.8) pravdivé: a), b), c), nepravdivé: d).

1.2.9) a), b): ne, c): ano

1.2.10) Definice: a), e), věta: b) c)

1.2.11) pravdivý: a), b), d)

1.3.1) **a)** $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **b)** $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **c)** $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **d)** $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **e)** $\mathbb{R},\mathbb{C}$ **f)** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **g)** $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ **h)** $\mathbb{C}$

1.3.2) $A=F;C=E;D=G;B=H$

1.3.3) **a)** $\{1;5\}$ **b)** $\{3;4;5;6\}$ **c)** $\{-2;-1;0;1;...\}$ **d)** $\{\ \}$

1.3.4) **a)** $\langle -2;3\rangle,\langle 0;1\rangle$ **b)** $\langle -2;5),\emptyset$ **c)** $(-3;-1)\cup(-1;4\rangle,\emptyset$ **d)** $\langle -4;2),\{0\}$ **e)** $(1;\infty),\langle 3;\infty)$ **f)** $(-\infty;+\infty),\langle -2;-1)$ **g)** $\langle 3;5\rangle,(3;5)$ **h)** $(-\infty;+\infty),\{2\}$

1.3.5) **a)** $(K\cap M)\cup(N\setminus(L\cup M))$, **b)** $N\cap L$, **c)** $K\cap L$, **d)** $N\setminus(N\setminus(K\cup L))$

1.3.6) **a)** 4; **b)** 33; **c)** není; úterý: knihovna, středa: Fj, plavání, čtvrtek: knihovna, pátek: plavání, sobota: Fj, knihovna

1.3.7) **a)** $\{1;5;6;8;9\}$, **b)** $J'_{\mathbb{R}} = (-\infty;0) \cup \langle 5;+\infty)$, $J'_{\mathbb{R}^+} = \langle 5;+\infty)$, $J'_{\mathbb{R}_0^-} = (-\infty;0)$

1.3.8) **a)** $\{1\},\{1;3\},\{1;4\},\{1;3;4\}$, **b)** $\{1;3\},\{1;2;3\},\{1;3;4\},\{1;2;3;4\}$,
c) $\{\ \},\{1\},\{3\},\{4\},\{1;3\},\{1;4\},\{3;4\},\{1;3;4\}$, **d)** $\{\ \}$

1.3.9) 1 100 **1.3.10)** N/A **1.3.11)** Obě rovnosti platí

1.4.1) 504

1.4.2) 40; 9 bonbónů, 5 perníků, 6 ořechů

1.4.3) 66

1.4.4) **a)** 1, 4, 7 **b)** 1, 3, 5, 7, 9

1.4.5) $2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 17$

1.4.6) 88; 5 148

1.4.7) **a)** $\pm$, **b)** bd, **c)** $a = c$, **d)** $n \mid c$

1.4.8) **a)** 144, 522, 711, 900, 288, 477, 855, **b)** 525, 585

1.4.9) N/A

1.4.10) N/A

1.4.11) **a)** 1, **b)** 1, **c)** $2, n = 2k; 1, n = 2k-1$, **d)** 1 nebo 5, **e)** $1,2,3,5,6,10,15,30$, **f)** $1,13$

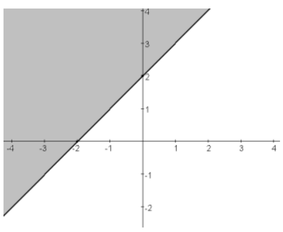
1.4.12) **a)** 43, **b)** 6

1.5.1) **a)** $-\mathrm{i}$, **b)** $-\mathrm{i}$, **c)** $-1+\mathrm{i}$, **d)** $-17-7\mathrm{i}$, **e)** $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$, **f)** −2, **g)** $-16+2\mathrm{i}$, **h)** $\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$, **i)** $-7-8\mathrm{i}$

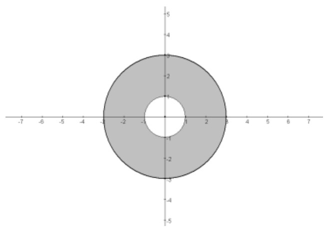
1.5.2) **a)** $2+\mathrm{i}; -2-\mathrm{i}$, **b)** $3-2\mathrm{i}; -3+2\mathrm{i}$

1.5.3) **a)** $2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$, **b)** $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$, **c)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\pi\right)$, **d)** $\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$, **e)** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{1}{6}\pi\right)$

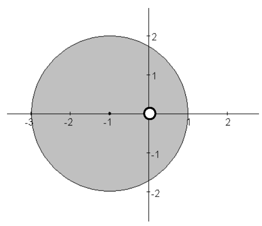
1.5.4) **a)**



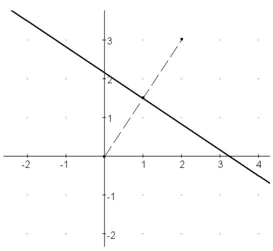
b)



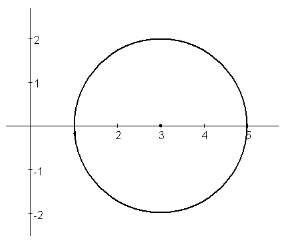
c)



d)



e)



f) reálná osa

1.5.5) **a)** $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}$, **b)** -2^{50}, **c)** $-2^6\,\mathrm{i}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^6$

1.5.6) $|a| = 5; \overline{a} = -3-4\mathrm{i}$ **1.5.7)** $4; 2\mathrm{i}$ **1.5.8)** $6+17\mathrm{i}, 6+8\mathrm{i}$

2.1.1) **a)** $3a^3$, **b)** $-a^3$, **c)** y^3, **d)** −12

2.1.2) **a)** $a^2+3; a \neq \frac{5}{3}$, **b)** $x^2-2xy+y^2; x \neq y$, **c)** $-m^4-2m^3-4m^2-8m-16; m \neq 2$, **d)** $2x^3+3x^2-5$, **e)** $\frac{3}{2}z^3-\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{4}z+2$, **f)** $3x^2-7xy+2y^2$

2.1.3) **a)** $2(a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right)$, **b)** $5mn^2(m-10)(m-1)$, **c)** $(x+z)(y+z)$, **d)** $(a+b)(b+c)(c-a)$, **e)** $3(x+y)(x+z)(y+z)$, **f)** $x(x-1)(x-2)(x-3)$, **g)** $3(x-z)(x+z)\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)$

2.1.4) **a)** $x^2-y^2;\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)$, **b)** $a\left(a+2b\right);3a^2\left(a+2b\right)^2\left(a-2b\right)$, **c)** $x+2;x^4-5x^2+4$, **d)** $x-5;\left(x-5\right)\left(x+9\right)\left(2x+1\right)$

2.1.5) N/A **2.1.6)** $\frac{1}{2}a^2$ **2.1.7)** $10a^2b^2c^2$

2.2.1) **a)** $\dfrac{a-1}{a+1};a\neq-1\wedge b\neq a$, **b)** $\dfrac{a+3}{a-3};b\neq\frac{2}{3}\wedge a\neq3$, **c)** $\dfrac{1}{3a^2-b^2};b\neq\pm a\sqrt{3}\wedge b\neq\frac{1}{2}a$

2.2.2) **a)** $\dfrac{3-a}{3};a\neq-3\wedge a\neq0$, **b)**, $2a;a\neq\pm b\wedge b\neq1\wedge b\neq0$ **c)** $y^2;x\neq\pm y$, **d)** $\dfrac{1}{x+2};\left|x\right|\neq2$,
e) $\dfrac{1-x}{x+9};x\neq\pm9\wedge x\neq-3$, **f)** $1+a+x;x\neq0\wedge x\neq a$, **g)** $0;a\neq2\wedge b\neq\pm1$,
h) $a^4+2a^3+4a^2;a\neq\pm2\wedge a\neq0$, **i)** $\frac{1}{4};x\neq\pm y\wedge x\neq0\wedge y\neq0\wedge x+y\neq\pm xy$,
j) $\frac{1}{abc};a\neq0\wedge b\neq0\wedge c\neq0\wedge a\neq b\wedge a\neq c\wedge b\neq c$,
k) $a+b+c;a\neq0\wedge b\neq0\wedge c\neq0\wedge a\neq b\wedge a\neq c\wedge b\neq c$

2.2.3) **a)** $v_0=\frac{h}{t}+\frac{1}{2}gt$ **;** $t=\frac{\sqrt{v_0^2-2gh}+v_0}{g}$ **; b)** $M=\frac{K(R+h)^2}{\pi}$; $R=\sqrt{\frac{\pi M}{K}}-h$; **c)** $r_1=\frac{fr_2(n_2-n_1)}{n_1r_2-f(n_2-n_1)}$

2.2.4) $\frac{x-2}{x+2},x\in\left(-\infty;-2\right);\frac{2-x}{x+2},x\in\left(-2;0\right);1,x\in\left(0;2\right)$

2.2.5) $\dfrac{2dv_1}{v_1^{\,2}-v_2^{\,2}}\,\mathrm{hod}$; rozdíl $=\dfrac{2dv_2}{v_1\left(v_1^{\,2}-v_2^{\,2}\right)}\,\mathrm{hod}$

2.3.1) **a)** $\frac{383}{234}$, **b)** 900, **c)** 0,6

2.3.2) **a)** $\sqrt[24]{\dfrac{a^3x}{c^4}};a>0\wedge x>0\wedge c>0$, **b)** $2b^2;a>0\wedge b>0\wedge c>0$, **c)** $\dfrac{1}{\sqrt[6]{ab^5}};a>0\wedge b>0$,
d) $-1;a\geq0\wedge b\geq0\wedge a\neq b$, **e)** $-x^{-\frac{7}{3}};x>0\wedge x\neq1$

2.3.3) **a)** $3-\sqrt{2}$, **b)** $\sqrt{2}+2+\sqrt{6}$, **c)** $a-\sqrt{a^2-1}$, **d)** $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3}$

3.1.1) **a)** $K=\left\{7\right\}$, **b)** $K=\mathbb{R}\setminus\left\{0;-1\right\}$, **c)** $K=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, **d)** $K=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, **e)** $K=\left\{\ \right\}$, **f)** $K=\left\{1\right\}$, **g)** $K=\left\{\ \right\}$, **h)** $K=\left\{3\right\}$

3.1.2) **a)** $K=\left\{-\frac{1}{4};-\frac{7}{4}\right\}$, **b)** $K=\left\{\frac{3}{4}\right\}$, **c)** $K=\left\{-2;4\right\}$, **d)** $K=\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

3.1.3) **a)** $K=\left\{\frac{2(p+1)}{p}\right\}$, pro $p=-1$ rovnice neexistuje, pro $p=0$ nemá řešení, pro $p=1$ je $K=\mathbb{R}$, **b)** pro $a\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;\infty\right)$ $K=\left\{\frac{a+1}{a-1}\right\}$, pro *a* = 0 rovnice neexistuje, pro *a* =1 nemá řešení, pro *a* = – 1 má rovnice kořen *x* = 0, **c)** $K=\left\{p^2+1\right\}$, pro $p=-1$ rovnice neexistuje, pro $p=0$ je $K=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$, pro $p=-1$ je $K=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

3.1.4) $a\in\left\{4,6,7\right\}$ **3.1.5)** $m\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left\{0\right\}$

3.1.6) **a)** $K=\left\{\left[t-1;-2t+3;t\right];t\in\mathbb{R}\right\}$, **b)** $K=\left\{\left[5;-3;1\right]\right\}$, **c)** $K=\left\{\left[1;3;5\right]\right\}$, **d)** $K=\left\{\left[2;2\right]\right\}$,
e) $K=\left\{\left[3;-1\right],\left[3;-5\right],\left[-1;1\right]\right\}$, **f)** $K=\left\{\left[4;-4;6;1\right]\right\}$

3.1.7) **a)** $a\in\left(-\infty;-5\right)$, **b)** $a=2,5$

3.1.8) **a)** $P[-1;0]; a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$; $a\in\{-1;1\}\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení,

b) $P\left[\frac{q-2}{p+1};\frac{pq+2}{p+1}\right]; p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $p=-1\wedge q=2\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení;

$p=-1\wedge q\neq 2\Rightarrow K=\{\ \}$

3.1.9) 500; 5

3.1.10) 18

3.1.11) 84 let

3.1.12) 36

3.1.13) 11krát

3.1.14) rychlost 90, 75 a 72 km/h; trať měří 90 km, časy: 1 h, 1 h 12 min, 1 h 15 min

3.1.15) 48 km/h

3.1.16) 25

3.1.17) 28

3.1.18) 9 : 35

3.1.19) 72 min; 120 min; 6 hodin

3.1.20) 6 litrů, 9 litrů

3.1.21) 20 m^3 studené a 5 m^3 teplé

3.1.22) 3 km/h

3.2.1) **a)** $K=\{-1;\frac{1}{2}\}$, **b)** $K=\{2\}$, **c)** $K=\{6-2\sqrt{6};6+2\sqrt{6}\}$

3.2.2) **a)** 2 řešení pro $m\in(0;1)\cup(1;\frac{8}{7})$, pro $m\in\{1;0;\frac{8}{7}\}$ po řadě jediný kořen $-1;1;-3$, pro $m\in(-\infty;0)\cup(\frac{8}{7};\infty)$ imaginární řešení, **b)** pro $p\in(-\infty;-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3};+\infty)$ 2 řešení, pro $p\in(-\frac{1}{3};0)\cup(0;\frac{1}{3})$ imaginární řešení, pro $p=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=1$, $p=0\Rightarrow K=\mathbb{R}$, $p=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-1$

3.2.3) **a)** $\{2;3;6\}$, **b)** $\{-\frac{2}{3};\frac{1}{2};2\}$

3.2.4) $s\in\{-2\}$

3.2.5) N/A

3.2.6) **a)** $q\in(-\infty;\frac{8}{7}\rangle$, **b)** $q\in\{\frac{8}{7}\}$,

c) $(-\infty;-6)\cup(0;\frac{8}{7})$, **d)** $q\in\emptyset$,

e) $q\in(-6;0)$

3.2.7) $ax^2+bx+a=0$; $a\neq 0$

3.2.8) $cy^2+by+a=0$; $a\neq 0\wedge c\neq 0$

3.2.9) $p\in\{3;4\}\Rightarrow K=\{0;-4\}$

3.2.10) $28x^2-20x+1=0$

3.2.11) $7y^2-12y+4=0$

3.2.12) $c=3$

3.2.13) $9y^2-213y+4=0$

3.2.14) **a)** $K=\{[\frac{16}{5};\frac{9}{5}]\}$, **b)** $K=\{[3;4],[1;0]\}$,

c) $K=\{[2;-2]\}$

3.2.15) $c=-3$, $c\in(-3;+\infty)$

3.2.16) 73

3.2.17) 6 ze 3. r.; 3 ze 4. r.

3.2.18) 240 cm^2

3.2.19) 10 litrů

3.2.20) 20 km/h

3.3.1) **a)** $K=\{0\}$, **b)** $K=\{-5;4\}$, **c)** $K=\{\frac{1}{2};5\}$, **d)** $K=\{2\}$, **e)** $K=\{1\}$

3.3.2) **a)** $K=\{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\}$, **b)** $K=\{1-7i\}$, **c)** $K=\{1{,}5-2i\}$

3.3.3) **a)** $K=\left\{1;-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, **b)** $x=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5}{18}\pi+\frac{1}{3}k\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{18}\pi+\frac{1}{3}k\pi\right)\right];k\in\{0;1;\ldots;5\}$,

c) $K=\left\{-1;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

3.3.4) **a)** $K=\{-1;\frac{1}{2};2\}$, **b)** $K=\{\frac{1}{3};\frac{1}{2};2;3\}$, **c)** $K=\{-1;1;-3;-\frac{1}{3};2;\frac{1}{2}\}$

3.3.5) **a)** $K=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$, **b)** $K=\{-2;-1;0\}$, **c)** $K=\{\frac{1}{3}\}$

3.3.6) **a)** $K=\{1+2\mathrm{i};-3+\mathrm{i}\}$, **b)** $K=\{-2+\mathrm{i};-\mathrm{i}\}$, **c)** $K=\{\cos\frac{1}{3}k\pi+i\sin\frac{1}{3}k\pi\}$ pro $k\in\{1;2;3;4;5\}$

3.4.1) **a)** $K=(-\infty;-2)\cup\langle-\frac{1}{2};2)$, **b)** $K=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;\frac{1}{2})$, **c)** $K=(3;9\rangle$

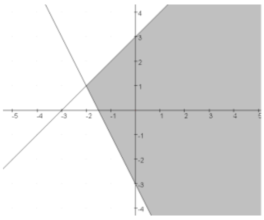
3.4.2) $x\in(0;1)$, resp. $x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

3.4.3) $K=\langle-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\rangle$

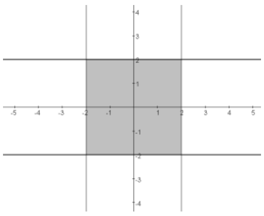
3.4.4) **a)** $K=(-\infty;-2)\cup\langle 1;\infty)$, **b)** $K=\left(-\infty;\frac{9}{2}\right\rangle$, **c)** $K=(-\infty;-1\rangle\cup\langle 3;\infty)$

3.4.5) **a)** $K=\langle -14;2)$, **b)** $K=(-\infty;-2\rangle\cup(2;\infty)$, **c)** $K=\left(\frac{20}{9};4\right)\cup(5;\infty)$

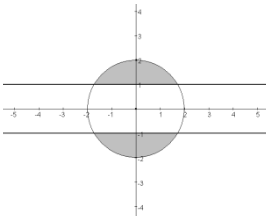
3.4.6) **a)**



b)



c)

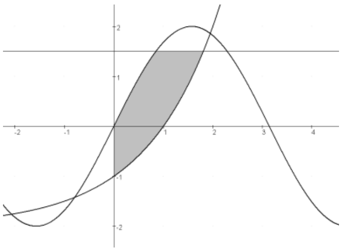


4.1.1) **a)** $D_f=(-\infty;-1)\cup\langle 0;\infty)$, **b)** $D_f=(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;\infty)$, **c)** $D_f=(0;3)\cup(3;\infty)$, **d)** $D_f=\mathbb{R}$, **e)** $D_f=\left\langle \frac{1}{2};+\infty\right)$, **f)** $D_f=(-6;-4)\cup(-4;-2\rangle\cup\langle 3;4)$

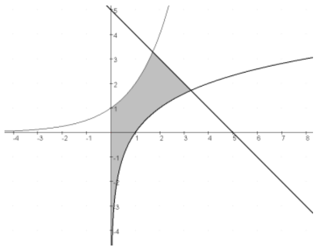
4.1.2) **a)** 7 **b)** 21 **c)** 4 **d)** není definováno **e)** –6 **f)** 10

4.1.3) **a)** $[0;1],\left[-\frac{1}{2};0\right]$, **b)** $[0;-1],[1;0],[-1;0]$, **c)** $[0;1],[-1;0]$, **d)** $[0;-5]$, **e)** $[0;1],\left[-\frac{3}{2};0\right]$, **f)** $[0;7]$, **g)** $[0;12],[3;0],[4;0]$, **h)** $[0;0],[-2;0]$, **i)** $[0;1],\left[-\frac{1}{3};0\right],[1;0]$, **j)** žádné nejsou

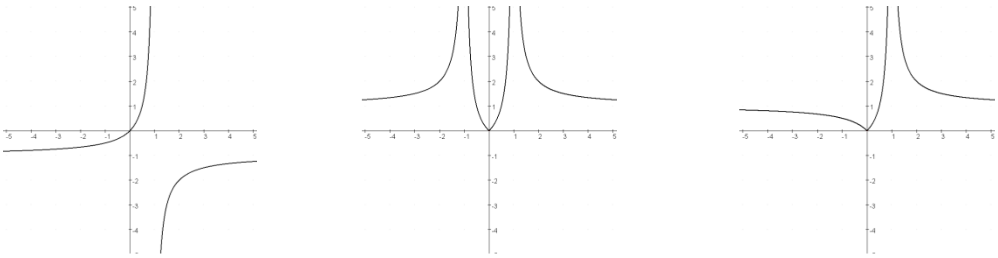
4.1.4) **a)**



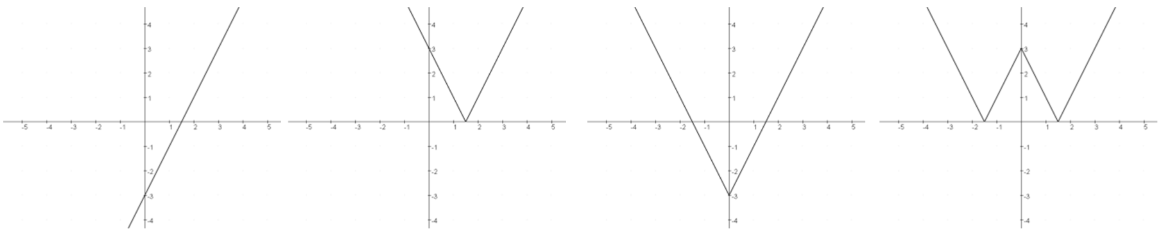
b)



4.1.5) **a)**



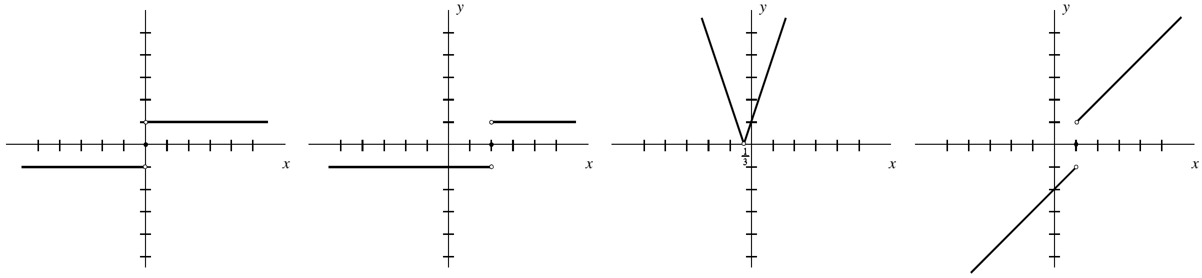
b)



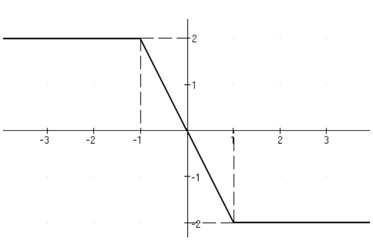
4.1.6) a), c) sudá, b) lichá

4.1.7) **a)** $x=1$ **b)** $x\in(1;\infty)$ **c)** $x\in(-\infty;1\rangle$

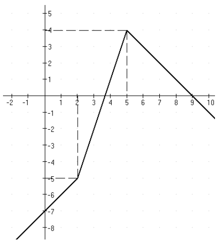
4.1.8) **a)** **b)** **c)** **d)**



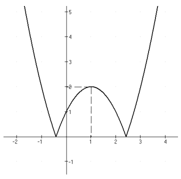
4.1.9) **a)**



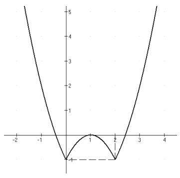
b)



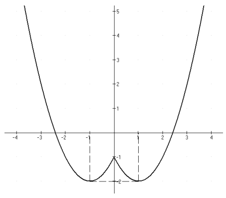
4.1.10) **a)**



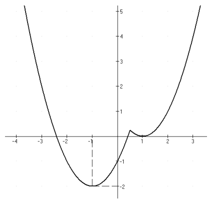
b)



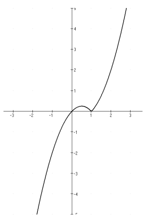
c)



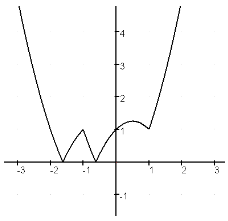
d)



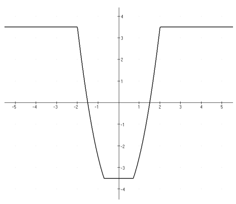
4.1.11) **a)**



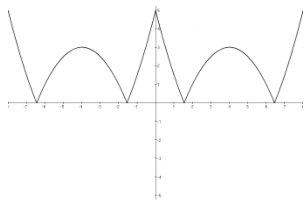
b)



c)



d)



4.1.12) $y = x^2 - 3x + 1$ **4.1.13)** 10 cm **4.1.14)** 4 m

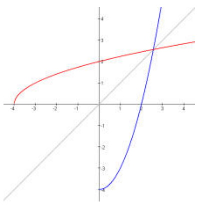
4.1.15) **a)** $D_f = (-\infty; \infty); H_f = (-\infty; 2)$, **b)** $D_g = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup \langle -1; \infty); H_g = (1; \infty)$

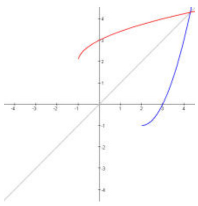
4.1.16) **a)** $V(t) = 45t - 375$, $D_V = \langle 8\frac{1}{3}; 15 \rangle, H_V = \langle 0; 300 \rangle$, *t* vyjadřuje denní čas (v hod), **b)** 8^{20}, **c)** 11^{40}, **d)** 255 litrů

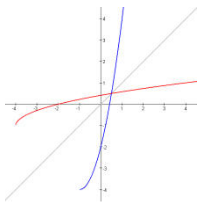
4.1.17) **a)** $c = \frac{5}{9}(f - 32); f = \frac{9}{5}c + 32$, **b)** 68 °F

4.1.18) **a)** $y = \sqrt{x+4}$, **b)** $y = \sqrt{x+1} + 2$ **c)** $y = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2} - 1$

$D_{f^{-1}} = \langle -4; \infty), H_{f^{-1}} = \langle 0; \infty)$ $D_{f^{-1}} = \langle -1; \infty), H_{f^{-1}} = \langle 2; \infty)$ $D_{f^{-1}} = \langle -4; \infty), H_{f^{-1}} = \langle -1; \infty)$

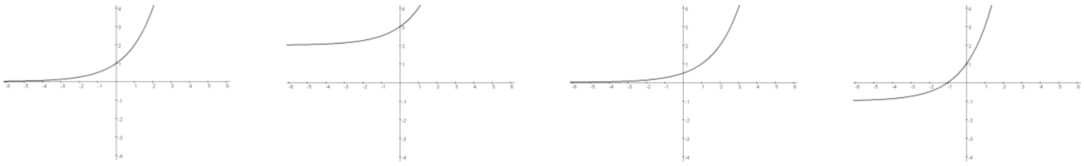




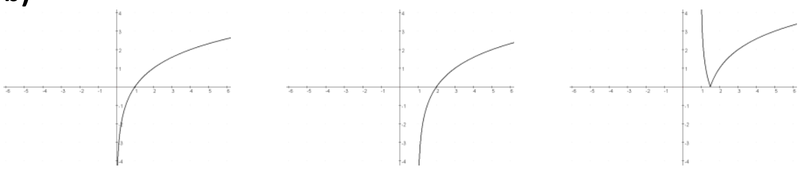


4.2.1) **a)** $(-6,4)^{-2} < (-1,3)^{-2} = (1,3)^{-2} < (-0,9)^{-2} < (0,8)^{-2}$, **b)** $(-0,6)^{-3} < (-1,4)^{-3} < 8^{-3} < 1^{-3} < (0,6)^{-3}$

4.2.2) **a)**



b)



4.2.3) **a)** $D_f = (4;\infty)$ **b)** $D_f = (-\infty;2,5)$ **c)** $D_f = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$ **d)** $D_f = \left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$ **e)** $D_f = (-1;1)$

4.2.4) **a)** 0 **b)** −1 **c)** −4

4.2.5) **a)** $\log_2 \dfrac{ab}{c}$ **b)** $\ln \dfrac{a\cdot\sqrt[n]{d}}{c^b}$ **c)** $\ln\left(\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{cd}\right)$

4.2.6) Platí všechny

4.2.7) **a)** $y=\log_2(x-1)$, $D_f = H_{f^{-1}} = \mathbb{R}, D_{f^{-1}} = H_f = (1;+\infty)$, **b)** $y = 3^{x-1}+1$, $D_f = H_{f^{-1}} = (1;+\infty), D_{f^{-1}} = H_f = \mathbb{R}$, **c)** $y=\log_3\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}$

4.2.8) $f\cap g = \{[1;7]\}$

4.2.9) **a)** $K=\{1\}$, **b)** $K=\{1;-1\}$, **c)** $K=\{-\tfrac{1}{4}\}$, **d)** $K=\{2\}$, **e)** $K=\{4\}$, **f)** $K=\{\tfrac{3}{2}\}$, **g)** $K=\{35\}$, **h)** $K=\{3\}$, **i)** $K=\{9\}$, **j)** $K=\left\{1;\tfrac{\log 2}{\log 3}\right\}$, **k)** $K=\{2;-2\}$

4.2.10) **a)** $K=\{3;1,5\}$, **b)** $K=\left\{10;10^{-\frac{1}{3}}\right\}$, **c)** $K=\{10000\}$, **d)** $K=\{-17\}$, **e)** $K=\{-2,5\}$, **f)** $K=\{1;10;\tfrac{1}{10}\}$

4.2.11) **a)** $K=(-\infty;-4)$, **b)** $K=(2;27)$, **c)** $K=(2;10\rangle$, **d)** $K=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$, **e)** $K=\langle 1;10\rangle$, **f)** $K=\left\langle 3-\tfrac{1}{2}\sqrt{2};3\right)$, **g)** $K=\left(10^{-1};10^{3}\right)$

4.2.12) **a)** $K=\{9\}$, **b)** $K=\left(\tfrac{-3+\sqrt{21}}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$, **c)** $K=(1;10)$

4.2.13) **a)** $K=\{[2;6]\}$, **b)** $K=\{[100;10]\}$, **c)** $K=\{[2;7]\}$, **d)** $K=\{[1;2]\}$

4.3.1) **a)** 0° **b)** 27° **c)** 233° **d)** π **e)** $\tfrac{7}{5}\pi$ **f)** $14°43'$ **g)** $269°50'$

4.3.2) **a)** $-\tfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** -1 **c)** $-\tfrac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $-\tfrac{\sqrt{3}}{2}$ **e)** 1 **f)** $-\sqrt{3}$ **g)** $-\tfrac{\sqrt{3}}{2}$ **h)** 0 **i)** $-\tfrac{\sqrt{2}}{2}$ **j)** -1 **k)** $-\sqrt{3}$ **l)** není definováno

4.3.3) **a)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{30°+k\cdot 360°;150°+k\cdot 360°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\tfrac{1}{6}\pi+2k\pi;\tfrac{5}{6}\pi+2k\pi\}$ **b)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\cdot 180°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi\}$ **c)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{60°+k\cdot 180°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\tfrac{1}{3}\pi+k\pi\}$

d) $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{240°+k\cdot 360°;300°+k\cdot 360°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\tfrac{4}{3}\pi+2k\pi;\tfrac{5}{3}\pi+2k\pi\}$

e) $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{45°+k\cdot 360°;315°+k\cdot 360°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\tfrac{1}{4}\pi+2k\pi;\tfrac{7}{4}\pi+2k\pi\}$ **f)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\cdot 360°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$ **g)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{135°+k\cdot 180°\}$, $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\tfrac{3}{4}\pi+k\pi\}$ **h)** $\alpha\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{180°+k\cdot 360°\}$,

$\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\pi + 2k\pi\}$ **i)** $\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{120° + k\cdot 360°; 240° + k\cdot 360°\}$, $\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$ **j)** $\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{90° + k\cdot 180°\}$, $\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$

4.3.4) $\sin 75^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$; $\cos 75^\circ = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; $\operatorname{tg} 75^\circ = 2+\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg} 75^\circ = 2-\sqrt{3}$

4.3.5) **a)** $\frac{1}{2}$, **b)** 0, **c)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, **d)** $\frac{1}{8}$, **e)** $2-\sqrt{3}$, **f)** $-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{1}{2}$

4.3.6) **a)** $\dfrac{2}{1+\sin x}; x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi\}$, **b)** $2\operatorname{tg} x; x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$, **c)** $2\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$, **d)** $\cos 2x$, **e)** $-2\operatorname{tg} x$, **f)** $\frac{11}{16}$, **g)** $m^2 - 2$

4.3.7) A-f, B-a, C-b, D-h, E-c, F-k, G-e, H-j, I-l, J-d, K-g, L-i

4.3.8) **a)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi; \frac{1}{3}\pi + k\pi\}$, **b)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{1}{6}\pi + k\pi\}$, **c)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\}$, **d)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{4}\pi + k\pi\}$, **e)** $K = \left\langle 0; \frac{1}{3}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{3}\pi; 2\pi\right\rangle$, **f)** $K = \left\langle 0; \frac{1}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right\rangle$,
g) $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{2k\pi; \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\}$, **h)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{3}\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi\}$, **i)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi\}$, **j)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}\pi + k\pi; \pi + 2k\pi; \frac{2}{5}k\pi\}$, **k)** $K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

4.3.9) N/A

4.3.10) N/A

4.3.11) $2\left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$

5.1.1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}; \cos\alpha = \frac{4}{5}; \operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$

5.1.2) **a)** $\beta = 28^\circ 26'$; $\gamma = 109^\circ 04'$; $c = 91$; $r = 48{,}1; \rho = 14; S = 1414\, j^2$,
b) $S = 3\sqrt{15}\,\text{cm}^2, \rho = \frac{1}{3}\sqrt{15}\,\text{cm}, r = \frac{16}{15}\sqrt{15}\,\text{cm}, \gamma = 46°34'3''$

5.1.3) *a* = 26,8 mm; vzdálenost protilehlých stran 64,7 mm

5.1.4) $|P_1P_2| = 3\sqrt{7}$; 0,5 cm; 4,5 cm

5.1.5) $a = \frac{40}{3}\,\text{cm}; c = \frac{50}{3}\,\text{cm}$

5.1.6) $|\sphericalangle 8,4,12| = 60°$, $|\sphericalangle 4,8,11| = 75°$, $|\sphericalangle 8,11,12| = 120°$, $|\sphericalangle 11,12,4| = 105°$

5.1.7) $e \doteq 5{,}6636\,\text{cm}$ $f \doteq 8{,}7954\,\text{cm}$

5.1.8) 10,98 m

5.1.9) 893 km/h

5.1.10) 4 : 1

5.1.11) $|BC| \doteq 2{,}773\,\text{cm}, |AC| = 3{,}7\,\text{cm}$

5.1.12) $a = 12{,}5; v = 12; e = 15; f = 20$

5.1.13) 40°

5.1.14) $AB > AC > BC > BD > AD > CD$

5.1.15) 10

5.1.16) cca 8,5 cm

5.1.17) $180°(n-2)$

5.1.18) $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

5.1.19) $O = 6\sqrt{5} + 9\sqrt{2}$, $S = 40{,}5\,\text{cm}^2$

5.1.20) **a)** asi 226 km; **b)** 1592 km

5.1.21) $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$

5.1.22) $r = \sqrt{\frac{1}{2}\left(r_1^2 + r_2^2\right)}$

5.1.23) $8\sqrt{6}\,\text{cm}$

5.1.24) 204 cm^2

5.1.25) **a)** $\alpha = 41°25', \beta = 82°50', \gamma = 55°45'$ **b)** $\alpha = 30°, \beta = 50°, \gamma = 100°$

5.1.26) $\alpha \doteq 53°08', \beta \doteq 67°23', \gamma \doteq 112°37'$, $\delta \doteq 126°52'; S \doteq 276\,\text{cm}^2$

5.1.27) 13,63 N; $144°25'$

5.1.28) $36°10'$

5.1.29) **a)** 314°, **b)** cca 2484 m

5.1.30) 368,5 m

5.1.31) *a* = 4,8 lokte, *S* ≐ 23 čtverečních loktů

5.1.32) 498,8 km/h

5.1.34) N/A

5.1.33) $|AX| = a\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

6.1.1) **a)** různoběžné, **b)** rovnoběžné, **c)** mimoběžné, **d)** mimoběžné

6.1.2) **a)** totožné, **b)** rovnoběžné, **c)** různoběžné

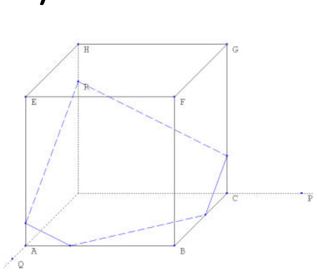
6.1.3) ve středu horní podstavy

6.1.4) rovnoběžné

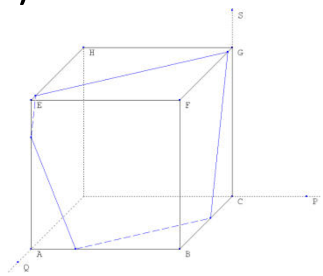
6.1.5) **a)** *BCG*, **b)** *MNP* (*N*, *P* jsou středy hran *CG*, *DH*), **c)** *KLM* (*K*, *L* středy hran *EF*, *FG*), **d)** rovina obsahujíc středy hran *AB*, *AD*, *DH*, *FG*, *GH*

6.1.6) **a)** různoběžné roviny s jediným společným bodem *L*, **b)** „stan“, **c)** „kniha“, **d)** dvě rovnoběžné a třetí s nimi různoběžná

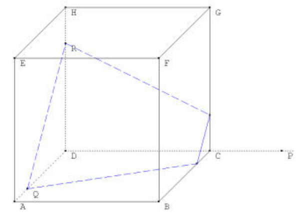
6.1.7) **a)**



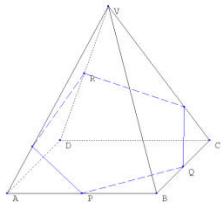
b)



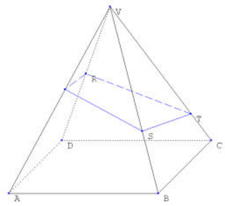
c)



6.1.8) **a)**

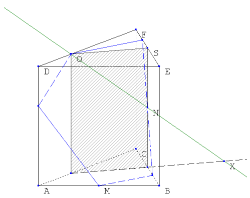


b)

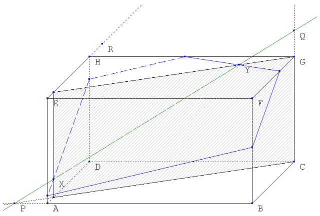


6.1.9) **a)** $p = AS$, *S* střed *EFGH*, **b)** $p = S_1S_2$, (středy *ABFE*, *BCGF*), c) $p \parallel AE, O \in p$, **d)** $p = MN$, *N* střed *EH*, **e)** $p = XY, X \in EG \cap PH, Y \in AC \cap BS_{AD}$, **f)** $p = AG$

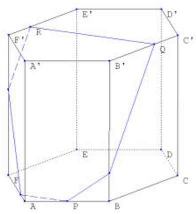
6.1.10) **a)**



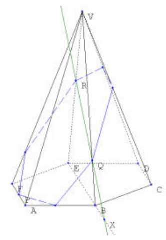
b)



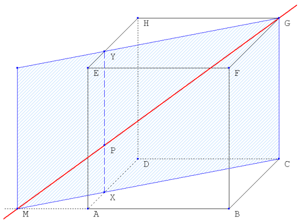
c)



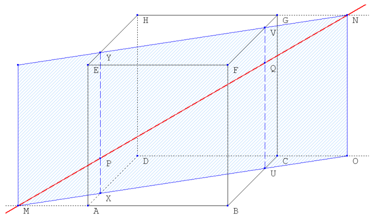
d)



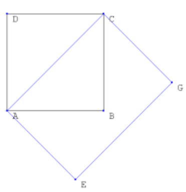
6.1.11) **a)**



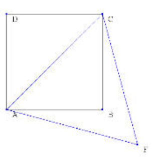
b)



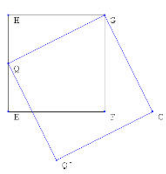
6.1.12) **a)**



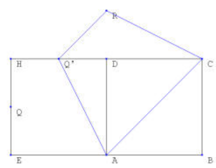
b)



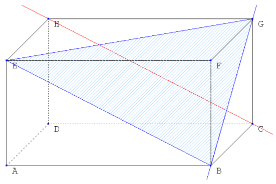
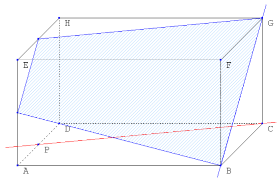
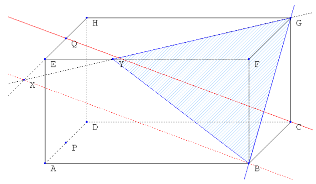
c)



d)



6.1.13) **a)** **b)** **c)**

6.1.14) N/A

6.2.1) $2\sqrt{6}$ cm

6.2.2) $53°7'48''$

6.2.3) $\frac{3}{4}a\sqrt{2}$

6.2.4) $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$

6.2.5) 45°

6.2.6) **a)** $90°$, **b) c)** $60°$, **d)** $77°5'$, **e)** $65°54'$

6.2.7) **a)** $43°33'$, **b)** $67°59'$, **c)** $77°$, **d)** $81°55'$

6.2.8) **a)** $54°52'$, **b)** $71°10'$

6.2.9) $60°$

6.2.10) **a)** $33°51'$, **b)** $50°12'$, **c)** $70°32'$

6.2.11) $34°56'$

6.2.12) **a)** $70°32'$, **b)** $54°44'$

6.2.13) **a)** $a\frac{\sqrt{19}}{4}$, **b)** $\frac{1}{4}a\sqrt{\frac{51}{5}}$

6.2.14) **a)** $\frac{1}{2}a\sqrt{7}$, **b)** $\frac{1}{4}a\sqrt{14}$, **c)** $\frac{1}{2}a\sqrt{2\sqrt{10}-3}$

6.2.15) **a)** a, **b)** $\frac{11}{20}a$, **c)** $a\frac{\sqrt{5}}{5}$, **d)** $a\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.3.1) $V=\frac{125}{3}\sqrt{2}$, $P=50\sqrt{3}$

6.3.2) $V=\dfrac{20}{27}\pi R^3; P=\dfrac{2\pi R^2}{R}\left(5+4\sqrt{5}\right)$

6.3.3) 27 cm^3

6.3.4) 7 : 1

6.3.5) $V=15\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$

6.3.6) $S_1=81; S_2=256$

6.3.7) 4 : 3

6.3.8) 900 cm^2

6.3.9) $V=\frac{4v^3}{3\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$, $P=2v^2\left(\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta}+\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha\sin\beta}\right)$

6.3.10) $\frac{3}{4}a^3$

6.3.11) 2 016 cm^2

6.3.12) **a)** asi 0,82, **b)** 7 066 482,345 tun, **c)** asi 1,9 m

6.3.13) $V=62500\pi\,\mathrm{dm}^3$

6.3.14) $V=\frac{1}{12}\pi a^3\left(3+\sqrt{2}\right)$,

$P=\frac{1}{4}\pi a^2\left[3+\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{7-2\sqrt{2}}\right]$

6.3.15) 1,5 litru

6.3.16) $V=\frac{13}{27}V_{koule}$

7.1.1) **a)** $x\geq 0; y\geq 0$, **b)** $x\geq 0; y\leq 0$, **c)** $x=y$, **d)** $x\in\mathbb{R}, y=2$

7.1.2) **a)** $1\leq x\leq 3; 1\leq y\leq 2$, **b)** $1\leq x\leq 3; 1<y\leq 2$, **c)** $x=3; 1<y\leq 2$, **d)** $1\leq x\leq 3; y\in\mathbb{R}$

7.1.3) **a)** $D[0;0;0], E[0;3;3], F[3;3;3], G[3;0;3]$, $H[0;0;3]$, **b)** $A'=A, B'=B, C'=C, D'=D$, $E'[0;3;-3], F'[3;3;-3], G'[3;0;-3], H'[0;0;-3]$, **c)** $A'[0;-3;0], B'[-3;-3;0], C'[-3;0;0], D'[0;0;0]$, $E'[0;-3;-3], F'[-3;-3;-3], G'[-3;0;-3], H'[0;0;-3]$, **d)** $A'[0;-3;0], B'[3;-3;0], C'=C, D'=D$, $E'[0;-3;-3], F'[3;-3;-3], G'[3;0;-3], H'[0;0;-3]$

7.1.4) **a)** 5, **b)** 13, **c)** $3\sqrt{10}$, **d)** $5\sqrt{3}$

7.1.5) $[4;0], [-8;0]$

7.1.6) **a)** $|AB|=4, |AC|=3, |BC|=5$, je, **b)** $|AB|=\sqrt{10}, |AC|=5, |BC|=5$, není

7.1.7) **a)** 4, **b)** −3

7.1.8) $S[0,4;-0,5;-1,4]$

7.1.9) **a)** $D[-4;0;0]$, **b)** $D[-7;1]$

7.1.10) **a)** 6,5; $T\left[-\frac{4}{3};0\right]$, **b)** $\sqrt{83}$; $T\left[-1;\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right]$

7.1.11) $r=-5; s=-4$

7.1.12) **a)** $\vec{c}$, **b)** $-\vec{d}$, **c)** $-\vec{c}$, **d)** $\vec{d}$, **e)** $-\vec{c}$, **f)** $\vec{d}$

7.1.13) **a)** $(11;2;-11)$, **b)** $(32;-12;-10)$

7.1.14) $\vec{c}=2\vec{a}, \vec{d}=-\vec{b}, \vec{e}=\vec{b}-\vec{a}, \vec{f}=2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

7.1.15) a) c) d) ne, b) ano

7.1.16) **a)** $u_2=13$, **b)** $u_1=-4$

7.1.17) a) ano, b) ne

7.1.18) **a)** 45°, **b)** 60°

7.1.19) **b)** 60°

7.1.20) **a)** $(-2;-1;-5)$ **b)** $(4;-3;1)$

7.1.21) **a)** $24,5\,j^2$ **b)** $9\,j^2$

7.1.22) $108\,j^3$

7.1.23) $18\,j^3$

7.2.1) $x+2y-10=0$

7.2.2) -10

7.2.3) $P\left[-\frac{11}{25};\frac{98}{25}\right]$, kolmé

7.2.4) **b)** neleží, **c)** 45°, 90°, 45°, **d)** $6x-y-13=0$

7.2.5) průsečnice $p=\{[3t;-2+2t;t];t\in\mathbb{R}\}$, odchylka $75°2'12''$

7.2.6) $2\sqrt{6}\,j$

7.2.7) $x-5y-6z-7=0$

7.2.8) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

7.2.9) $M'[-3;2;2]$

7.2.10) $6\,j$

7.2.11) **a)** 0° **b)** $p\cap\rho=\varnothing$

7.2.12) **a)** $42°08'$ **b)** $79°06'$ **c)** $16°36'$ **d)** $64°09'$ **e)** $2\sqrt{2}\,j^2$ **f)** $6\,j^3$

7.2.13) $a=7, b=-10$

7.2.14) $x+4y-14z+7=0$

7.2.15) $x-z+1=0$

7.2.16) $\alpha\cap\beta=\left\{\left[-\frac{38}{11}+5t;\frac{7}{11}+t;2t\right],t\in\mathbb{R}\right\}$

7.2.17) $M'[-5;12;14]$

7.2.18) $x=-1+2r, y=3-3r, z=7-4r, r\in\mathbb{R}$

7.2.19) $P[-1,8;2,8;-1,4], t=\frac{4}{5}\in\langle 0;1\rangle$

7.2.20) $9x-2y-3z-2=0$

7.2.21) $P[3;0;4]$

7.2.22) *C*, *D*

7.2.23) není

7.2.24) *M* je, *N* není

7.2.25) N/A

7.2.26) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases} t\in\mathbb{R}_0^+$ **b)** $[31;47]$ **c)** 3 s

7.2.27) $V[-0,2;2,2]$

7.2.28) $p_1: x+3=0$, $p_2: x-y\sqrt{3}+3=0$

7.2.29) $p=\left\{\left[1+t;-5+t\sqrt{2};3-t\right];t\in\mathbb{R}\right\}$

7.3.1) $(x-4)^2+(y-5)^2=16$

7.3.2) Elipsa: $S[3;2], o\parallel x, a=5, b=3, e=4,\ F_1[-1;2], F_2[7;2]; A=[-2;2], B[8;2], C[3;5], D[3;-1]$

7.3.3) $p\cap k=\left\{[-1;-2],\left[\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right]\right\}$, sečna

7.3.4) Hyperbola: $S[3;7], o\parallel x, a=4, b=5, e=\sqrt{41}, F_1\left[3-\sqrt{41};7\right]$,
$F_2\left[3+\sqrt{41};7\right]; A=[-1;7], B[7;7], a: y-7=\pm\frac{5}{4}(x-3)$

7.3.5) $y=-\frac{1}{8}x$

7.3.6) kružnice, $t_1: 2x-3y-9=0; t_2: 2x-3y-35=0$

7.3.7) $S\left[2;-\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right];\ r=\frac{1}{2}\sqrt{74}\ ;\ [0;0;0];[4;0;0];[0;-7;0];[0;0;3]$

7.3.8) $P_x[-2;0;0], P_x'[4;0;0]$

7.3.9) $5x-3y-2z+14=0$

7.3.10) $x^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$

7.3.11) $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

7.3.12) $67°7'$

7.3.13) $B\left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\sqrt{3}\right], C\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right]$

7.3.14) $(x+4)^2+(y+1)^2=25$

7.3.15) $(x-5)^2+(y+2)^2=1$

7.3.16) sečna $\left(-\infty;-\sqrt{21}\right)\cup\left(\sqrt{21};\infty\right)$, tečna $\pm\sqrt{21}$

7.3.17) $(x-2,2)^2+(y-0,9)^2=0,16$

7.3.18) $S=4a^2b^2:\left(a^2+b^2\right)$

7.3.19) $12x=y^2$, 3 cm před *V*

7.3.20) $S[-3;2;2], r=2$

7.3.21) $d\in(1;29)$

7.3.22) $x-9=0, y-5=0$, $3x+4y-35=0$, $4x-3y-45=0$

8.1.1) 105 + 455

8.1.2) 420, 28krát

8.1.3) **a)** 28, **b)** 45, **c)** 210, **d)** 35, **e)** 1260, **f)** 7350

8.1.4) 151 200

8.1.5) **a)** 81, **b)** 648, **c)** 4536

8.1.6) 665 280

8.1.7) **a)** 240, **b)** 96

8.1.8) $4n^3$

8.1.9) 190, 1140

8.1.10) 181, 1130

8.1.11) 945

8.1.12) 231

8.1.13) $x; \frac{3}{8}x; \frac{7}{4}x; \frac{11}{8}x; \frac{11}{4}x$

8.1.14) **a)** $K=\{6\}$, **b)** $K=\{5\}$

8.1.15) **a)** $K=\mathbb{N}\setminus\{1;2\}$, **b)** $K=\{0;1\}$, **c)** 4

8.1.16) 924

8.1.17) N/A

8.1.18) N/A

8.1.19) 5. člen

8.1.20) $0{,}0001;10$

8.1.21) $x\in\{0;3\}$

8.2.1) $p=\frac{2}{3}$

8.2.2) $\frac{5}{18}; \frac{11}{36}; \frac{35}{36}; \frac{25}{36}$

8.2.3) $\frac{4}{19}; \frac{12}{95}$

8.2.4) **a)** 0,1 **b)** 0,9 **c)** $\frac{5}{9}$

8.2.5) $\frac{25}{216}$

8.2.6) **a)** 59,049 %, **b)** 7,29 %, **c)** 91, 85%

8.2.7) $\frac{1}{66}$

8.2.8) **a)** 0,45, **b)** 0,55, **c)** 0,2, **d)** 0,3

8.2.9) $\frac{26}{37}$

8.2.10) 5,6 %

8.2.11) $\hat{x}=21$, $\tilde{x}=23$, $\bar{x}=23{,}35$, $s^2=15{,}7275$, $s=3{,}96579122$

8.2.12) harmonický (vhodnější) je 5,29

8.2.13) 24

8.2.14) $\bar{x}=1{,}95$, $\mathrm{Mod}(x)=1$, $\mathrm{Med}(x)=1$; relativní četnosti: 0,53; 0,21; 0,13; ...; pravděpodobnosti: 0,5; 0,25; 0,125; ...

8.2.15) $\bar{x}\doteq 2{,}00$, $\mathrm{Mod}(x)=2$, $\mathrm{Med}(x)=2$, $s_x\doteq 1{,}29$, $Q(x)\doteq 1$

9.1.1) rostoucí omezená, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$, $a_{n+1}=\dfrac{(5n+7)(n+1)}{(n+2)(5n+2)}\cdot a_n$; $a_1=\dfrac{7}{2}$

9.1.2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

9.1.3) **a)** $a_n=\frac{1}{n^2}$, **b)** od 32. členu

9.1.4) $x\in(-1;+\infty)$**;** $x\in(-\infty;-1\rangle$

9.1.5) $a_n=4^n-1$ nebo $a_n=-256\left(4^{-n}-1\right)$

9.1.6) $a_n=9-4n; a_n=-7+4n$

9.1.7) $a_n=2n-3$

9.1.8) $V=\frac{1}{2}$

9.1.9) 10, $d=3$

9.1.10) $x=0$

9.1.11) $3; a_n=5\cdot 2^{n-1}$

9.1.12) $2;4;6;8$ nebo $8;6;4;2$

9.1.13) N/A

9.1.14) N/A

9.2.1) **a)** $\frac{2}{3}$, **b)** $\frac{1}{2}$, **c)** 0, **d)** –1, **e)** $\frac{1}{2}$, **f)** e^2, **g)** neexistuje, **h)** $+\infty$

9.2.2) **a)** $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, **b)** $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$, **c)** $\frac{5}{6}$, **d)** $\frac{4}{7}$, **e)** $\frac{1}{6}$, **f)** $\frac{1}{3}$

9.2.3) **a)** $\frac{5}{198}$, **b)** $\frac{533}{990}$, **c)** $\frac{130}{37}$

9.2.4) **a)** $K=\{10\}$, **b)** $K=\{6\}$, **c)** $K=\{-6;4\}$, **d)** $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{1}{6}\pi+k\pi, \frac{5}{6}\pi+k\pi\}$, **e)** $K=\{2\}$, **f)** $K=\{-4\}$

9.3.1) 1683

9.3.2) 27 m^3

9.3.3) $38°10'$

9.3.4) osmiúhelník

9.3.5) 9π

9.3.6) **a)** $6a$, **b)** $a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

9.3.7) **a)** $2s\left(2+\sqrt{2}\right)$ **b)** $\frac{2}{3}s^2$

9.3.8) **a)** $4\left(2+\sqrt{2}\right)\ j$ **b)** $2\ j^2$

9.3.9) **a)** $9a^2$, **b)** $\frac{3}{2}\pi a^2$

9.3.10) **a)** 3 %, **b)** $a_{25} = 84658,87$

9.3.11) 27 581,90 Kč

9.3.12) 14

9.3.13) 25 646 Kč

9.3.14) 11,2 %

9.3.15) 430 731 Kč

9.3.16) $\frac{3}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)a^2$

9.3.17) $1,6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^3$

10.1.1) **a)** 4, **b)** $\frac{6}{7}$, **c)** 1, **d)** $\frac{8}{5}$, **e)** −1, **f)** $\frac{2}{3}$, **g)** 1, **h)** $+\infty$

10.1.2) **a)** $y' = 18x^2 \sin\left(3x^3+2\right)\cdot\cos\left(3x^3+2\right)$, **b)** $y' = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, **c)** $y' = -\dfrac{1+2xy}{x^2+2y}$, **d)** $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} t$

10.1.3) *t:* $x+2y-4=0$, *n:* $2x-y-3=0$

10.1.4) **a)** $\uparrow$ $(-\infty;0),(1;+\infty)$, $\downarrow$ $(0;1)$, $MAX\,[0;0]$, $MIN\,[1;-1]$, **b)** $\uparrow\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$, $\downarrow$ $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, $MAX\left[\frac{\pi}{4};1\right], MIN\left[-\frac{\pi}{4};-1\right]$, **c)** $\uparrow(1;+\infty)$, $\downarrow(0;1)$, $MIN\,[1;0]$, **d)** $\uparrow\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$, $\downarrow$ $\left(0;\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $MAX\left[\frac{\pi}{2};1\right], MIN\left[\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

10.1.5) $MAX\,[0;5], MIN\,[1;-2], MIN\,[-3;-130]$

10.1.6) **a)** $\left[-\frac{1}{2};-2\right]$, **b)** $\left[\frac{1}{2};1\right]$, **c)** $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

10.1.7) **a)** $a_1 : x = \frac{1}{2}; a_2 : y = x+\frac{1}{2}$, **b)** $a_1 : x = 0; a_2 : y = 2x$

10.1.8) $\frac{25}{3} \doteq 8,3\,\mathrm{cm}$

10.1.9) **a)** $t = 7,5$ s, **b)** $d \doteq 71$ m

10.1.10) **a)** konvexní $\smile$ $(-\infty;+\infty)$, konkávní $\frown$ $\{\ \}$, **b)** $\smile$ $(-\infty;0),\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$, $\frown$ $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $I_1\,[0;0]$, $I_2\left[\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\right]$, **c)** $\smile$ $(-\infty;2)$, $\frown$ $(2;+\infty)$, $I\,[2;48]$, **d)** $\smile$ $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$, $\frown$ $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};\infty\right)$, $I_1\left[-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right], I_2\,[0;0], I_3\left[\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, **e)** $\smile$ $(-1;+\infty)$, $\frown$ $(-\infty;-1)$

10.2.1) **a)** $\dfrac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} - \dfrac{2}{x^2} + c$, **b)** $-\ln\left|1+\cos x\right| + c$, **c)** $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$, **d)** $\frac{1}{3}\ln^3 x + c$, **e)** $\frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + c$, **f)** $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x| - x^{-1} + c$, **g)** $\frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x + c$, **h)** $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$

10.2.2) $\frac{16}{3}\ j^2$

10.2.3) $\frac{59}{3}\ j^2$

10.2.4) $V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$